МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Т.А. Вартанян, Е.В. Ващенко

ВВЕДЕНИЕ В НАНОПЛАЗМОНИКУ

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2012

Вартанян Т.А., Ващенко Е.В. Введение в наноплазмонику. Учебное пособие. - СПб: НИУИТМО, 2012. – 86 с. Рис. 28. Библ. 14.

Рассматриваются основные теоретические положения электродинамики сплошных сред и физические явления, лежащие в основе современных применений наноплазмоники.

Учебное пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и профилю 200700.68.05 Оптика наноструктур. Материал может быть рекомендован для студентов старших курсов физико-технических специальностей, а также при подготовке магистров и аспирантов, специализирующихся в области применения оптических методов в нанотехнологиях.

Рекомендовано к изданию Ученым советом факультета фотоники и оптоинформатики, протокол № 8 от 31 октября 2012 г.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012. © Вартанян Т.А., Ващенко Е.В., 2012.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение
Глава 1. Коллективные электронные возбуждения в металлах
1.1 Параметры, определяющие характер коллективного движения
электронов. Заряд, масса и плотность электронов
1.2 Плоскопараллельная проводящая пластинка. Теорема Гаусса
1.3 Уравнение плазменных колебаний. Расчет плазменной частоты
1.4 Статическая проводимость металлов
1.5 Высокочастотная проводимость металлов
1.6 Уравнения Максвелла с источниками. Закон полного тока. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной
форме
1.7 Диэлектрическая проницаемость. Напряженность электрического поля точечного заряда в среде. Поляризация диэлектриков
1.8 Уравнения Максвелла в среде без внешних источников
1.9 Диэлектрическая проницаемость металлов в модели Друде-
Лорентца. Расчет диэлектрической проницаемости через
высокочастотную проводимость. Время релаксации
Глава 2. Структура электромагнитного поля в металлах на
оптических частотах
2.1 Зависимость диэлектрической проницаемости металлов от
2.2 Волновое уравнение. Лисперсионное уравнение
2.2 Волновое уравнение. Дисперсионное уравнение
2.5 Полнос внутреннее отражение
2.4 Сказярный потенциал. Бычисление напряженности поля точечного
25 Электрический липоль Потенциал липоля Липоль-липольное
2.5 Электрический диполь. Потенциал диполя. Диполь-дипольное
2 6 Зарял вблизи поверуности проволника Метол зеркальных
изображений Сила притажения заряда к поверхности
изооражении. Сила притяжения заряда к поверлности
103арлластного проводника
2.7 Бзаимоденствие диполя с поверхностью незаряженного проводника. 2.8 Заряд вблизи поверхности диодектрика. Поде зарядов
2.0 заряд волизи поверхности диэлектрика. Поле Зарядов, инплиированных на поверхности диолектрика. Воснат нотоничелог
индуцированных на поверхности диэлектрика. Расчет потенциалов
внутри и вне диэлектрика
2.9 поверхностный плазмон. частота поверхностного плазмона в
модели друде-лоренца.
2.10 диэлектрическии шар в однородном электрическом поле.
Сферическая полость в диэлектрической среде
<i>2.</i> 11 ЛОКАЛИЗОВАННЫИ ПЛАЗМОН

Глава 3. Плазмонные наночастицы

3.1 Проводящий эллипсоид в однородном внешнем поле.	
Геометрический фактор	47
3.2 Диэлектрический эллипсоид в однородном внешнем поле.	
Наведенный дипольный момент и поле внутри эллипсоида	51
3.3 Частоты плазмонных резонансов в эллипсоидальных частицах с	
диэлектрической проницаемостью Друде-Лоренца. Предельные	
случаи	54
3.4 Собственные колебания плазмонного типа в системе из двух частиц.	
Расщепление плазмонного резонанса сферической частицы в	
присутствии второй частицы	56
3.5 Распределение заряда в дипольных колебаниях пары частиц	59
Глава 4. Проявления и применения плазмонных резонансов	
4.1 Пропускание, оптическая плотность и экстинкция	61
4.2 Индикатриса рассеяния (фазовая функция). Сечение рассеяния и	
поглощения. Сечение экстинкции	61
4.3 Амплитула рассеяния. Оптическая теорема	62
4.4 Сечение поглошения лля эллипсоилальной частицы с	-
лиэлектрической проницаемостью Друде-Лоренца.	67
4.5 Отсутствие отраженной волны при палении света на границу	0.
разлепа двух сред под углом Брюстера	70
4.6 Поверхностный плазмон на плоской поверхности металла	78
47 Возбужление поверхностных плазмонов Конфигурации Отто и	10
Кречмана	81
тро плини.	01
СПИСОК ПИТЕРАТУРЫ	87
	, 04

Введение

Наноплазмоника – это раздел электродинамики сплошных сред, в котором изучаются явления, связанные с коллективными электронными возбуждениями, локализованными в малых металлических частицах. Обе указанные выше особенности, и малый размер частиц, и коллективный характер возбуждений, значительно упрощают теоретическое описание явлений, относящихся к наноплазмонике. Наноплазмоника может быть изложена в значительной мере на классическом языке при минимальном обращении к квантовой механике. Несмотря на эту относительную простоту, наноплазмоника богата, как яркими физическими явлениями, так и важными приложениями в различных областях современной техники.

Настоящее пособие является введением в наноплазмонику. Основное его содержание состоит в изложении тех разделов электродинамики сплошных сред, которые не входят в обычные курсы оптики, но являются необходимыми для понимания процессов возбуждения коллективных резонансов в металлах, способов их наблюдения и использования.

Предполагается, что читатель знаком с дифференциальным и интегральным исчислением, а также с векторной алгеброй и комплексными числами в объеме соответствующих курсов для бакалавров технических специальностей. Необходимые сведения из векторного анализа, без которых невозможно овладение профессиональными приемами исследования и современной литературы чтение по наноплазмонике, даются непосредственно в пособии.

Освоив содержание данного пособия, студент будет готов как к работам, связанным с исследованием новых материалов на основе металлических наночастиц, так и к практическому использованию устройств и технологий, основанных на возбуждении коллективных резонансов плазмонного типа.

Глава 1. Коллективные электронные возбуждения в металлах

1.1. Параметры, определяющие характер коллективного движения электронов. Заряд, масса и плотность числа электронов

Если исключить ядерную энергетику, то в основе всей современной техники лежит использование наших знаний об электромагнитных взаимодействиях. Источником электрического поля является электрический заряд, a источником магнитного поля служит заряд движущийся. Из всех заряженных свободном состоянии, частиц, существующих В электрон обладает наименьшим зарядом. Все остальные заряды кратны заряду электрона. Электрон обладает также и наименьшей массой, хотя массы других частиц и не кратны массе электрона. Малое значение массы электрона приводит к тому, что он более подвижен, чем другие частицы. Поэтому естественно ожидать, что во многих ситуациях именно электроны определяют отклик вещества на внешние воздействия. С этой точки зрения неудивительно, что параметрами, характеризующими вещество, в котором в основными заметном количестве присутствуют электроны, будут их заряд e и масса m, которые являются мировыми константами, и плотность числа электронов, то есть число электронов в единице объема вещества *n*.

Следует заметить, что описание электронов в веществе как свободных, является идеализацией. Но во многих металлах поведение определенной части электронов действительно оказывается очень близким к поведению свободных электронов. При этом определенное улучшение описания их поведения может быть достигнуто, если им приписать эффективную массу, несколько отличную от массы истинно сводного электрона в вакууме. Эти отличия, однако, обычно невелики, и в дальнейшем изложении не учитываются. Эффективный заряд электрона точно равен заряду свободного электрона за исключением небольшого числа экзотических ситуаций, далеко выходящих за рамки данного курса.

Итак, три величины: электрический заряд, масса и плотность числа электронов могут служить основными параметрами, характеризующими металл с точки зрения его электрических свойств. Поскольку заряд и массу мы считаем мировыми константами, то основным параметром, отличающим один металл от другого, является концентрация электронов. Еще одним важным параметром служит время релаксации импульса электрона. Оно будет введено после того, как будет рассмотрено движение электронов.

1.2. Плоскопараллельная проводящая пластинка. Теорема Гаусса

Сила F, с которой один покоящийся заряд q_1 действует на другой покоящийся заряд q_2 , находящийся на расстоянии r от первого заряда, дается известным законом Кулона

$$F = \frac{q_1 \ q_2}{r^2}.$$
 (1)

Для того, чтобы охарактеризовать поле первого заряда независимо от того, есть второй заряд, или нет, вводится напряженность электрического поля *E*

$$E = \frac{q}{r^2}.$$
 (2)

В дальнейшем в расчетах удобно также пользоваться потоком вектора напряженности электрического поля через поверхность Ф. Особенно просто определяется поток через сферическую поверхность с центром, совпадающим с точкой нахождения заряда. В этом случае непосредственный расчет дает (*dS* – элемент сферической поверхности)

$$\Phi = \iint E dS = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q.$$
 (3)

Как нетрудно видеть, поток не зависит радиуса поверхности. Этот результат обобщается на произвольную замкнутую поверхность и произвольное число зарядов внутри нее (теорема Гаусса).

Воспользуемся этим результатом, чтобы рассчитать поле тонкой плоскопараллельной пластинки равномерно заряженной с плотностью σ.Учитывая симметрию, получим, что напряженность поля с обеих сторон пластинки одинакова и равна

$$E = 2\pi\sigma. \tag{4}$$

1.3. Уравнение плазменных колебаний. Расчет плазменной частоты

Приведенных выше сведений о связи напряженности электрического поля с плотностью заряда достаточно, чтобы элементарным путем рассчитать плазменную частоту. Рассмотрим согласованное смещение всех электронов в металлической пластинке перпендикулярно ее поверхности на расстояние *x*. В результате такого смещения на обеих поверхностях пластинки образуются заряды. Знак этих зарядов на противоположных сторонах пластинки противоположный, а величину заряда на каждой из сторон естественно охарактеризовать поверхностной плотностью, которая равна

$$\sigma = enx.$$
 (5)

Складывая поля (4), созданные зарядами на обеих сторонах пластинки, найдем напряженность электрического поля внутри пластинки

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi enx. \tag{6}$$

Это поле действует на электроны, которые мы считаем свободными и вызывает их ускорение, которое можно рассчитать по второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$
(7)

Сила, действующая на электрон, определяется напряженностью электрического поля

$$F = -eE = -4\pi e^2 nx. \tag{8}$$

Знак минус соответствует тому обстоятельству, что сила возвращает сместившиеся электроны в положение равновесия. Сравнивая (7) и (8) находим уравнение, которому должна удовлетворять зависимость величины смещения электронов от времени

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi e^2 nx = 0. (9)$$

Как известно из механики, уравнение (9) описывает колебательную систему. Частота собственных коллективных колебаний свободных электронов и называется плазменной частотой ω_{pl} . Величина плазменной частоты согласно (9) определяется соотношением

$$\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}.\tag{10}$$

Плазменная частота является важнейшей характеристикой металла. В большинстве металлов ее величина порядка 10¹⁵ с⁻¹, то есть совпадает с частотами свободных электромагнитных волн в ультрафиолетовой части спектра.

Необходимо обратить внимание на то, что плазменная частота имеет смысл только для коллектива электронов. Каждый электрон в отдельности считается при этом свободным, есть его движение не ограничено ничем, кроме взаимодействия с электрическими полями, созданными другими электронами.

1.4. Статическая проводимость металлов.

Уравнение (9) имеет очевидный недостаток, состоящий в том, что в нем не учитываются процессы релаксации. В результате описываемые им плазменные колебания не затухают, что, разумеется, не соответствует действительности. Релаксационные процессы наиболее естественно вводятся в уравнения, описывающие статическую проводимость металлов, поскольку именно затухание направленного движения электронов под действием внешнего электрического поля приводит к закону Ома, а время этого затухания τ определяет величину проводимости на постоянном токе. Между временем затухания и скоростью затухания γ существует очевидное соотношение

$$\gamma = \frac{1}{\tau}.$$
(11)

Рассмотрим движение электрона под действием внешнего электрического поля. Если начальная скорость электрона равна v_0 , то через время t он приобретет скорость v_1 которую можно рассчитать по формуле

$$v = v_0 - \frac{eEt}{m}.$$
 (12)

Ускорение электрона продолжается до первого акта рассеяния, природу которого мы здесь не рассматриваем. Будем считать, что скорость электрона после рассеяния никак не связана с его скоростью до рассеяния, а среднее время между актами рассеяния как раз равно времени затухания. Тогда плотность тока *j*, вызванного электрическим полем, равна

$$j = -env = \frac{e^2 n\tau}{m} E.$$
 (13)

Таким образом, мы получили линейную зависимость *j* от *E*, где $\frac{e^2n\tau}{m} = \sigma_0 = 1/\rho$ проводимость – характеристика, обратная удельному сопротивлению. Следовательно, используя (13) мы нашли для проводимости σ_0 выражение, в которые входят только известные величины и время релаксации τ :

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n\tau}{m}.$$
(14)

1.5. Высокочастотная проводимость металлов.

Высокочастотная проводимость – характеристика $\sigma(\omega)$ проводников, посредством которой задается линейная связь между плотностью тока и напряженностью приложенного переменного электрического поля частоты ω

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}.$$
(15)

Уравнение движения для импульса имеет вид

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{t} + F(t), \qquad (16)$$

а уравнение движения для импульса, приходящегося на один электрон, приобретает вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{t} - eE. \tag{17}$$

Будем искать стационарное решение в форме

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}.$$
(18)

Подставляя комплексные величины p и E в уравнение (17), которое должно по отдельности выполнятся для действительной и мнимой частей, получаем, что $p(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-i\omega p(\omega) = -\frac{p(\omega)}{t} - eE_0, \qquad (19)$$

где

$$p(\omega) = \frac{eE_0}{i\omega - \frac{1}{t}}.$$
(20)

2

Таким образом, плотность тока равна

$$j = -env = -en\frac{p}{m} = -\frac{en}{m}\left(\frac{eE}{i\omega - \frac{1}{\tau}}\right) = \frac{e^{2}n/m}{-i\omega + \frac{1}{\tau}}E = \frac{e^{2}n\tau/m}{-i\omega\tau + 1}E,$$
(21)

где

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} -$$
(22)

высокочастотная проводимость.

Рассмотрим предельные случаи для высокочастотной проводимости:

если частота мала $\omega \tau \ll 1$ выражение (22) переходит в результат Друде (14) для статической проводимости;

если частота достаточно велика, так что выполняется условие $\omega \tau \gg 1$, то

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{-i\omega\tau} = i\frac{ne^2}{\omega m'},\tag{23}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} = \begin{cases} \sigma_0 \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ \frac{\sigma_0}{-i\omega\tau} = i\frac{ne^2}{\omega m}\omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$
(24)

1.6. Уравнения Максвелла с источниками. Закон полного тока. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

Электромагнитное поле в вакууме в каждой пространственной точке \vec{r} в любой момент времени t определяется заданием двух векторов: напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и индукции магнитного поля $\vec{B}(\vec{r},t)$. Через векторы \vec{E} и \vec{B} выражается сила \vec{F} , действующая в электромагнитном поле на пробный заряд q, движущийся со скоростью \vec{v} :

$$\vec{F} = q \ \vec{E} + q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}.$$
(25)

Напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ может быть найдена измерением силы \vec{F} , действующей на неподвижный пробный заряд. С магнитным полем $\vec{B}(\vec{r},t)$ связана та часть силы \vec{F} , которая появляется только при движении заряда (сила Лоренца).

Источниками электромагнитного поля являются заряды и токи, для характеристики которых служат объемная плотность заряда ρ и вектор плотности тока \vec{j} .

Поток напряженности электрического поля через кубик по закону Гаусса определяется полным зарядом, находящимся в ограниченном этой поверхностью объеме:

$$\Phi = 4\pi q = ES = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q.$$
(26)

- Через грань z(a): $E_x \Delta y \Delta z$
- Через грань *b*: $(E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_x \Delta x) \Delta y \Delta z$

Поток через a+b:

$$\left(z_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x - E_x\right)\Delta y\Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V.$$

Аналогично для остальных граней, в результате получаем:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \Delta V = \Phi.$$

Связь электрического и магнитного полей с их источниками выражается следующими уравнениями:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{27}$$

Напоминание:

$$div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$
(28)

Выберем замкнутый контур l и вычислим поток левой и правой частей через произвольную (незамкнутую) поверхность S, опирающуюся на контур l. Поток ротора \vec{B} преобразуем с помощью математической теоремы Стокса в циркуляцию вектора \vec{B} по контуру l:

$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{E} \, d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \, d\vec{S}.$$
(29)

Второе слагаемое в правой части выражает справедливую в случае постоянных полей теорему о «магнитном напряжении», согласно которой циркуляция вектора \vec{B} по любому замкнутому контуру определяется полным током \vec{l} через поверхность, опирающуюся на этот контур. Эту теорему можно рассматривать как следствие закона Био-Савара-Лапласа, определяющего магнитное поле, которое создается элементом постоянного тока. Первый член в правой части уравнения говорит о том, что изменяющееся электрическое поле $\partial \vec{E} / \partial t$ (ток смещения), так же как и ток проводимости \vec{j} , создает вихревое магнитное поле.

Вторая пара уравнений Максвелла

$$div\vec{B}=0,$$
 (30)

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
(31)

не содержит источников электромагнитного поля ρ и \vec{j} . Так же как и первая пара, это линейные дифференциальные уравнения первого порядка, но в отличие от первых неоднородных уравнений эти уравнения однородны. Интегральная форма уравнения (30)

$$\oint \vec{B} \, d\vec{S} = 0 \tag{32}$$

говорит о том, что поток индукции магнитного поля через любую замкнутую поверхность *S* равен нулю, т.е. линии индукции магнитного поля представляют собой замкнутые кривые.

В интегральной форме уравнения (31)

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{B} \, d\vec{S}.$$
(33)

можно узнать закон электромагнитной индукции, экспериментально открытый Фарадеем: ЭДС в замкнутом контуре l определяется скоростью изменения потока магнитной индукции через поверхность S, ограниченную контуром l.

1.7. Диэлектрическая проницаемость. Напряженность электрического поля точечного заряда в среде. Поляризация диэлектриков

В рамках макроскопической теории, рассматривающей диэлектрик как сплошную среду, для описания электрического состояния диэлектрика используется понятие плотности электрического заряда $\rho(r)$ (*r*пространственная координата точки), усреднённого по малому объёму, содержащему достаточно большое число атомов. Под действием внешнего электрического поля в диэлектрике возникает плотность заряда $\rho(r)$ и в результате – дополнительное к внешнему электрическое поле. Для описания электрического состояния диэлектрика удобно вводить вектор поляризации объёма диэлектрика) \vec{P} . момент единицы (электрический дипольный связанный с р соотношением:

$$div\vec{P} = -\rho. \tag{34}$$

Распределение плотности заряда ρ и электрического поля \vec{E} в диэлектрике можно найти, решая систему уравнений Максвелла для статического поля:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho,\tag{35}$$

$$rot\vec{E} = 0 \tag{36}$$

дополненную зависимостью $\vec{P}(\vec{E})$ (уравнение состояния диэлектрика). Зависимость $\vec{P}(\vec{E})$ характеризует электрические свойства диэлектрика. Она различна для разных веществ и даже для разных образцов одного вещества, так как зависит от однородности, степени чистоты материала, содержания дефектов в нём и т. п.

Для большинства диэлектриков в широком интервале \vec{E} полей справедлива линейная зависимость $\vec{P}(\vec{E})$, выражаемая для изотропных веществ и кубических кристаллов соотношением:

$$\vec{P} = \kappa \vec{E}.$$
(37)

Коэффициент пропорциональности $\kappa = \vec{P}/\vec{E}$ называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика. Вместо вектора \vec{P} часто пользуются вектором электрической индукции \vec{D} :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}.$$
(38)

Величина є называется диэлектрической проницаемостью. Очевидно, что:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa \tag{39}$$

для любого диэлектрика $\varepsilon > 1$. Величины κ и ε являются основными характеристиками электрических свойств диэлектрика. Сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов, помещённых в безграничный диэлектрик, в ε раз слабее, чем для тех же зарядов в вакууме. Введение \vec{D} не даёт дополнительной информации о поведении диэлектрика в электрическом поле и целесообразно лишь для удобства записи уравнений Максвелла.

Для анизотропных сред вместо $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ справедливо более общее соотношение:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \hat{\varepsilon} \vec{E},\tag{40}$$

где $\hat{\varepsilon}$ - тензор диэлектрической проницаемости. В анизотропном диэлектрике \vec{P} и \vec{E} не параллельны друг другу, т. к. \vec{P} зависит от ориентации вектора \vec{E} относительно осей симметрии кристалла.

1.8. Уравнения Максвелла в среде без внешних источников. Формулы векторного анализа

Действие электрического поля электромагнитной волны на электрон в атоме вызывает его смещение из положения равновесия. Относительное смещение отрицательного и положительного зарядов проявляется в том, что атом приобретает дипольный момент. Вещество оказывается поляризованным. Макроскопической характеристикой поляризованности вещества служит вектор \vec{P} , который равен отношению векторной суммы дипольных моментов всех атомов и молекул в физически бесконечно малом элементе среды к объему этого элемента.

Наличие поляризованности вещества означает возникновение в нем поляризационных зарядов и токов, обусловленных связанных в атомах электронами. Эти заряды и токи необходимо учитывать в полных уравнениях Максвелла при нахождении электромагнитного поля. Поэтому для описания

электромагнитных волн в веществе нужно искать решение уравнений Максвелла:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho,\tag{41}$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$
(42)

когда заряды и токи ρ и \vec{j} не равны нулю, а выражаются через поляризованность \vec{P} .

Когда вещество поляризовано неоднородно, т.е. вектор \vec{P} меняется от точки к точке, то физически бесконечно малый элемент объема приобретает не только дипольный момент, но и отличный от нуля полный заряд. Макроскопически этот поляризационный заряд характеризуется объемной плотностью ρ , которая выражается через быстроту изменения вектора \vec{P} в пространстве (через его производные по координатам) следующим соотношением:

$$\rho = -div\vec{P}.\tag{43}$$

Изменение поляризованности с течением времени означает, что создающие ее заряды вещества движутся, т.е. возникает поляризационный ток. Он характеризуется вектором плотности тока \vec{j} , который равен скорости изменения вектора \vec{P} :

$$\vec{j} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$
(44)

Каждый движущийся элементарный заряд вещества q вносит в ток свой вклад, равный произведению заряда на его скорость \vec{v} . Если в единице объема содержится N таких зарядов (движущихся с одинаковой скоростью), то они создают плотность тока $\vec{j} = Nq\vec{v}$. Но $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, поэтому

$$\vec{j} = d(Nq\vec{v})/dt = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$
(45)

Входящие в правые части неоднородных уравнений Максвелла плотность заряда ρ и плотность тока \vec{j} содержат вклад как внешних источников, создающих интересующее нас поле излучения, так и рассмотренный ранее вклад поляризованности вещества. Если интересоваться распространяющимися от внешнего источника волнами в тех местах, где внешних источников уже нет. То в правые части уравнений Максвелла войдут только обусловленные поляризованностью плотность заряда $\rho = -div\vec{P}$ и плотность тока $\vec{j} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$div\vec{E} = -4\pi \, div\vec{P},\tag{46}$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$
(47)

Этим уравнениям можно формально придать такой же вид, как и уравнением Максвелла для вакуума, если ввести вместо напряженности электрического поля \vec{E} вектор электрической индукции \vec{D} по следующему определению:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}.$$
(48)

При использовании вектора \vec{D} уравнения Максвелла принимают вид:

$$div\vec{D} = 0, \tag{49}$$

$$rot\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0.$$
(50)

Вторая пара уравнений Максвелла не содержит источников ρ и \vec{j} и поэтому для полей в веществе имеет тот же вид, что и для полей в вакууме:

$$div\vec{B}=0,$$
 (51)

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$
(52)

Чтобы увидеть, что эта система уравнений имеет решения в виде волн, распространяющихся в среде, получим из уравнений, включающих в себя, как напряженность электрического поля, так и индукцию магнитного поля, новые уравнения, содержащие только одно из этих полей (например, \vec{E}).

Для этого возьмем ротор каждой из частей уравнения

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\tag{53}$$

$$rot(rot\vec{E}) = -\frac{1}{c}rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$
(54)

Преобразуем левую часть уравнения, для этого сначала вспомним основные дифференциальные операции векторного исчисления:

Напоминание: $div \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \partial u seprenuu sekmophoй функции;$ $grad\varphi = \vec{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - rpaduehm скалярной функции;$

$$\begin{split} grad(div \vec{E}) &= \vec{i} (\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x}) + \vec{j} (\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y}) + \vec{k} (\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - one pamop \mathcal{J}an \mathcal{J}ac a c \mathcal{K}an \mathcal{J}pho \mathcal{U} \mathcal{K}uuu; \\ \Delta \varphi &= (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - one pamop \mathcal{J}an \mathcal{J}ac a c \mathcal{K}an \mathcal{J}pho \mathcal{U} \mathcal{K}uuu; \\ \Delta \vec{E} &= \vec{\nabla}^2 = \Delta (\vec{\iota} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z) = \vec{\iota} \Delta E_x + \vec{j} \Delta E_y + \vec{k} \Delta E_z = \\ &= \vec{\iota} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \vec{k} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \\ - one pamop \mathcal{J}an \mathcal{J}ac a \textit{ Bermophou } \mathcal{W} \mathcal{K}uuu; \\ &rot \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\iota} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - pomop \textit{ Bermophou } \mathcal{W} \mathcal{H} \mathcal{U}uu. \end{split}$$

Следовательно,

$$rot(rot\vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ = \vec{i} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} \end{bmatrix} + \vec{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \\ + \vec{k} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \\ = \vec{i} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \vec{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \\ = \vec{i} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \vec{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \\ = \vec{k} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \vec{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \\ = grad(div\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \end{aligned}$$

Чтобы выразить $rot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ через напряженность электрического поля \vec{E} с помощью $rot \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, продифференцируем обе части $rot \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ по времени и изменим в левой части порядок дифференцирования по координатам и времени:

$$rot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$
(55)

Следовательно, напряженность электрического поля \vec{E} удовлетворяет уравнению:

$$grad(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$
(56)

Если диэлектрическая среда однородна, т.е. $\varepsilon(\vec{r}) = const$ и $\varepsilon(\vec{r}) \neq 0$, то $div\vec{D} = 0$. Следовательно, $div(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon div(\vec{E}) = 0$, т.е. $div\vec{E} = 0$. Тогда получаем волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$
(57)

1.9. Диэлектрическая проницаемость металлов в модели Друде-Лорентца. Расчет диэлектрической проницаемости через высокочастотную проводимость. Время релаксации

Выражение для тока, вызываемого в металле зависящим от времени электрическим полем (21), можно записать в виде

$$\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega).$$
 (58)

Для определения плотности тока в точке \vec{r} достаточно учесть действие электрического поля на электрон за время, прошедшее с момента его последнего столкновения. Если поле не изменяется существенным образом на расстояниях, сравнимых с длиной свободного пробега электрона, при вычислении плотности тока в точке $\vec{j}(\vec{r},t)$ в точке \vec{r} можно считать, что поле во всем пространстве имеет такую же величину $\vec{E}(\vec{r},t)$ как и в точке \vec{r}

$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega).$$
(59)

При наличии плотности тока *j* уравнения Максвелла имеют вид:

$$div\vec{E}=0, \tag{60}$$

$$div\vec{B} = 0, \tag{61}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\tag{62}$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$
(63)

Найдем решение, зависящее от времени как $e^{-i\omega t}$. Так как в металле $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$, находим

$$rot(rot\vec{E}) = grad(div\vec{E}) - \nabla^{2}\vec{E} = -\nabla^{2}\vec{E} = \frac{i\omega}{c}rot\vec{B} =$$

$$= \frac{i\omega}{c} \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} - -\frac{i\omega}{c}\vec{E}\right),$$

$$-\nabla^{2}\vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2} \left(1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega}\right)\vec{E}.$$
(65)

Это уравнение имеет вид обычного волнового уравнения

$$-\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega) \vec{E}$$
(66)

с комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega}.$$
(67)

Подставляя выражение для высокочастотной проводимости:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau'},\tag{68}$$

преобразуем формулу для диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma_0}{\omega (1 - i\omega \tau)}.$$
(69)

Для статической проводимости, учитывая выражение для плазменной частоты

$$\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m} \tag{70}$$

получаем:

$$\sigma_0 = \frac{\omega_{pl}^2 \tau}{4\pi}.$$
(71)

Диэлектрическая проницаемость через плазменную частоту выражается следующим образом

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\omega_{pl}^2 \tau}{\omega(1 - i\omega\tau)}.$$
(72)

Введем величину $\gamma = \frac{1}{\tau}$, определяющую время релаксации, тогда после преобразований получаем следующее выражение для $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\omega_{pl}^2}{\omega\gamma - i\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{i\gamma\omega + \omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma)},$$
(73)

$$\varepsilon(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) + i \frac{\omega_{pl}^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$
(74)

Глава 2. Структура электромагнитного поля в металлах на оптических частотах

2.1. Зависимость диэлектрической проницаемости металлов от частоты

Если частота достаточна велика, так что выполняется условие

$$\omega \gg \frac{1}{\tau'},\tag{75}$$

тогда выражение для диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}.$$
(76)

Рассмотрим частные случаи, в зависимости от значений диэлектрической проницаемости:

1) $\varepsilon(\omega) < 1$ – среда менее плотная, чем вакуум;

2) $\varepsilon(\omega)$ -действительная отрицательная величина ($\omega < \omega_{pl}$), то уравнение

$$-\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega) \vec{E}$$
(77)

имеет лишь такие решения, которые экспоненциально убывают в пространстве, т.е. в этом случае волна не может распространяться (показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ – мнимый);

3) Если же $\varepsilon(\omega)$ – положительная величина ($\omega < \omega_{pl}$), то решения уравнения

$$-\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega) \vec{E}$$
⁽⁷⁸⁾

являются осциллирующими, волна может распространятся и металл должен быть прозрачным. Это справедливо только в том случае, если вблизи частоты $\omega = \omega_{pl}$ выполняется предположение $\omega \gg \frac{1}{\tau}$.

2.2. Волновое уравнение. Дисперсионное уравнение.

Волновое уравнение в среде

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$
(79)

после преобразования Фурье по координатам и времени

$$\vec{E}(\vec{k},\omega) = \int d\vec{r}dt e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \vec{E}(\vec{r},t)$$
(80)

можно записать в виде

$$-\vec{k}\left(\vec{k}\vec{E}(\vec{k},\omega)\right) + k^{2}\vec{E}(\vec{k},\omega) = \varepsilon(\omega,\vec{k})\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\vec{E}(\vec{k},\omega).$$
(81)

Решения уравнения разделяются на два класса в зависимости от поляризации электрического поля. Для поперечных волн, т.е. волн, в которых волновой вектор и напряженность электрического поля перпендикулярны,

$$\vec{k}\vec{E}(\vec{k},\omega) = 0. \tag{82}$$

Уравнение (81) принимает вид

$$k^{2}\vec{E}(\vec{k},\omega) = \varepsilon(\omega,\vec{k})\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\vec{E}(\vec{k},\omega)$$
(83)

и распространение волн возможно только при выполнении дисперсионного соотношения

$$k^{2} = \varepsilon \left(\omega, \vec{k}\right) \frac{\omega^{2}}{c^{2}}.$$
(84)

Для продольных волн волновой вектор и напряженность поля параллельны, $\vec{E} \parallel \vec{k}$, уравнение сводится к уравнению

$$\varepsilon(\omega,\vec{k})\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{k},\omega) = 0, \qquad (85)$$

нетривиальное решение, которого возможно только при выполнении условия

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) = 0, \tag{86}$$

означающего, что продольные колебания возможны только на частотах, соответствующих нулям диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим наиболее важные частные случаи распространения волн в металлах. Формула для диэлектрической проницаемости в металлах

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$
(87)

предсказывает совершенно разный характер распространения волн в областях низких и высоких частот.

В случае высоких частот $\omega \gg \gamma$, в формуле для диэлектрической проницаемости можно пренебречь слагаемым *i* γ по сравнению с ω , то для диэлектрической проницаемости получается вещественное выражение

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}.$$
(88)

При высоких частотах характер дисперсионных явлений в металлах обусловлен инерцией свободных электронов: за промежуток времени между двумя актами рассеяния, который в среднем равен $\tau = 1/\gamma$, электрон успевает

совершить много вынужденных колебаний, так как при $\omega \gg \gamma$ их период $T \ll \tau$.

Подставляя в дисперсионное соотношение выражение для диэлектрической проницаемости, получим выражение для волнового вектора:

$$(kc)^{2} = \left(-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}} + 1\right)\omega^{2} = -\omega_{pl}^{2} + \omega^{2},$$
(89)

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_{pl}^2 + (kc)^2},\tag{90}$$

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{pl}^2}.$$
(91)

Плазменная частота ω_{pl} имеет смысл своего рода критической частоты.

При $\omega < \omega_{pl}$ диэлектрическая проницаемость отрицательна, а показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ чисто мнимый. Это значит, что волны с $\omega < \omega_{pl}$ (но $\omega \gg \gamma$) не могут распространятся в металле из-за сильного затухания, причем это затухание не связано с поглощением энергии. В самом деле, диэлектрическая проницаемость вещественна (а истинное поглощение происходит только при $Im\varepsilon \neq 0$). Фактически при $\omega < \omega_{pl}$ происходит полное отражение падающей волны от среды. При чисто мнимом показателе преломления коэффициент отражения равен 1.

При $\omega > \omega_{pl}$ показатель преломления становится вещественным, а металл прозрачным для излучения. В этом случае волновой вектор выражается следующим образом

$$k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_{pl}^2 - \omega^2},\tag{92}$$

а выражение для напряженности электрического поля волны имеет вид

$$E = E_0 e^{-i\omega t + ik_x x} = E_0 e^{-i\omega t + i(\pm \frac{i}{c}\sqrt{(\omega_{pl}^2 - \omega^2)}x)} = E_0 e^{-i\omega t \pm \frac{1}{c}\sqrt{(\omega_{pl}^2 - \omega^2)}x}.$$
 (93)

При $\omega \ll \gamma$ формулу

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$
(94)

можно привести к виду:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{i\omega\gamma} = 1 + i\frac{\omega_{pl}^2}{\omega\gamma} \approx i\frac{\omega_{pl}^2}{\omega\gamma}.$$
(95)

Таким образом, диэлектрическая проницаемость мнимая. Такие волны проникают в глубь металла на расстояние, которое меньше длины волны в вакууме (скин-эффект). Коэффициент отражения для них близок к единице, т.е. они практически полностью отражаются от поверхности. Волновой вектор и напряженность электрического поля волны в этом случае имеют вид:

$$k^{2} = \varepsilon \frac{\omega^{2}}{c^{2}} = i \frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega \gamma} \frac{\omega^{2}}{c^{2}} = i \frac{\omega_{pl}^{2}}{\gamma} \frac{\omega}{c^{2}},$$
(96)

$$k = \frac{\omega_{pl}}{c} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} \sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \frac{\omega_{pl}}{c} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}},$$
(97)

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t \pm i(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\gamma}})x} = E_0 e^{-i\omega t \pm i\frac{\sqrt{2}\omega_{pl}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}x \mp \frac{\sqrt{2}\omega_{pl}}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}x}.$$
(98)

Для промежуточных частот ($\omega \approx \gamma$) нужно пользоваться полным выражением

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega(\omega + i\gamma)'},\tag{99}$$

а не его предельными формами. В этом случае диэлектрическая проницаемость комплексна, а у показателя преломления отличны от нуля зависящие от частоты вещественная и мнимая части. Это значит, что волны разных частот при распространении в металле по-разному затухают.

2.3. Полное внутреннее отражение

Полное электромагнитное поле, включающее падающую, отраженную и преломленные волны, должно удовлетворять граничным условиям, а именно условиям непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{B} на границе. Пусть падающая волна с волновым вектором $\vec{k}^{(0)}$ и отраженная с волновым вектором $\vec{k}^{(1)}$ распространяются в среде с диэлектрической

проницаемостью ε_1 , а преломленная волна с волновым вектором $\vec{k}^{(2)}$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Предположим, что первая среда прозрачна. Для каждой из трех плоских волн используем комплексную запись. Таким образом, в каждой точке границы в любой момент времени

$$E_{\tau}^{\ 0}e^{i(\vec{k}^{(0)}\vec{r}-\omega_{0}t)} + E_{\tau}^{\ 1}e^{i(\vec{k}^{(1)}\vec{r}-\omega_{1}t)} = E_{\tau}^{\ 2}e^{i(\vec{k}^{(2)}\vec{r}-\omega_{2}t)}$$
(100)

$$B_{\tau}^{\ 0}e^{i(\vec{k}^{(0)}\vec{r}-\omega_{0}t)} + B_{\tau}^{\ 1}e^{i(\vec{k}^{(1)}\vec{r}-\omega_{1}t)} = B_{\tau}^{\ 2}e^{i(\vec{k}^{(2)}\vec{r}-\omega_{2}t)}$$
(101)

Чтобы граничные условия выполнялись в любой момент времени, коэффициенты при *t* в показателях экспонент для всех трех волн должны быть одинаковы. Поэтому частоты отраженной и преломленной волн равны частоте падающей волны.



Рис. 1. Направление падающей, отраженной и преломленной волн на плоской границе раздела двух сред. Красной стрелкой, показано направление распространение волны при $\theta = \theta_{пo}$.

Пусть ось x направлена вдоль границы раздела сред (рис. 1), а ось z перпендикулярно границы раздела сред. Угол θ , образованный падающей волной с осью z называется углом падения. Граничные условия должны выполнятся сразу во всех точках границы раздела. Это возможно лишь тогда, когда зависимость E_{τ} и B_{τ} от координат точки в плоскости xy у всех волн одинакова, т.е. равны тангенциальные компоненты k_x , k_y их волновых векторов. Отсюда следует, прежде всего, что направления распространения всех трех волн лежат в одной плоскости, проходящей через ось z (плоскость падения). Выберем в качестве плоскости падения плоскость xz. Таким образом,

$$k_x^{(1)} = k_x^{(2)} = k_x^{(0)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin\theta.$$
 (102)

Найдем нормальные к границе раздела компоненты волновых векторов отраженной и преломленной волн. Для этого воспользуемся дисперсионным соотношением

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon,\tag{103}$$

согласно которому

$$k^{(1)^{2}} = k_{x}^{(1)^{2}} + k_{z}^{(1)^{2}} = \frac{\omega^{2}}{c^{2}}\varepsilon_{1}, \qquad (104)$$

$$k^{(2)^{2}} = k_{x}^{(2)^{2}} + k_{z}^{(2)^{2}} = \frac{\omega^{2}}{c^{2}}\varepsilon_{2}.$$
(105)

Отсюда, учитывая (102) находим *z* – компоненты отраженной и преломленной волн:

$$k_z^{(1)} = -k_z^{(0)} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta,$$
(106)

$$k_z^{(2)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta}.$$
 (107)

Величина $k_z^{(2)}$ в поглощающей среде (при комплексном значении ε_2) комплексна. Она будет комплексной (чисто мнимой) и в прозрачной среде, если выполнено условие

$$\sin^2\theta > {\varepsilon_2/\varepsilon_1}.\tag{108}$$

Для падения света из оптически более плотной среды 1 на границу менее плотной среды 2 коэффициент отражение достигает единицы, когда угол падения достигает значения θ_{no} , определяемого условием

$$\sin\theta_{\Pi 0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \tag{109}$$

и называемого предельным углом полного отражения.

При $\theta > \theta_{no}$ волновой вектор $\vec{k}^{(2)}$ волны во второй среде имеет вещественную проекцию $k_x^{(2)}$ на направление границы и мнимую проекцию $k_z^{(2)}$ на направление нормали к границе. Формулы (102) и (107) для этого случая дают

$$k_x^{(2)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin\theta, \qquad (110)$$

$$k_z^{(2)} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \theta - \varepsilon_2}.$$
 (111)

Это значит, что электромагнитное поле во второй (оптически менее плотной) среде представляет собой неоднородную волну, у которой поверхности

постоянной фазы – плоскости x = const, перпендикулярные границе, а поверхности постоянной амплитуды – плоскости z = const, параллельные границе раздела. Знак перед корнем определяется из требования, чтобы при удалении от границы раздела амплитуда этой неоднородной волны уменьшалась. Только такое решение имеет физический смысл. Подставляя $k_x^{(2)}$ и $k_z^{(2)}$ в выражение

$$\vec{E}^{(2)}e^{i(\vec{k}^{(2)}\vec{r}-\omega_2 t)},$$
(112)

получаем

$$E^{(2)} = E^{(0)} e^{-i\omega t + ik_x x \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \theta - \varepsilon_2 z}}.$$
(113)

Убыванию амплитуды в направлении оси z соответствует знак «+» в (111).

Волну во второй среде можно считать поверхностной: ее амплитуда заметна только на расстоянии нескольких длин волн от граничной поверхности.

2.4. Скалярный потенциал. Вычисление напряженности поля точечного заряда через потенциал

Так как электростатическое поле потенциально, a *rotgrad* любой, не имеющей сингулярностей функции равен нулю, то в соответствии с уравнением Максвелла

$$rot\vec{E} = 0 \tag{114}$$

напряженность может быть представлена в следующем виде:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -grad\varphi.$$
(115)

Функция φ называется потенциалом.

В области пространства, где $\vec{E} = 0$, потенциал не меняется:

$$\varphi(\vec{r}) = const. \tag{116}$$

Если поле однородно, т.е.

$$\vec{E} = E\vec{e}_x = const,\tag{117}$$

то потенциал изменяется линейно вдоль направления вектора напряженности

$$\varphi(x) = -Ex + C, \tag{118}$$

где константа С определяется из условия нормировки.

Как следует из (118), модуль тангенса угла наклона линейной зависимости $\varphi(x)$ равен напряженности поля:

$$\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right| = E.$$
 (119)

В общем случае модуль тангенс угла наклона функции изменения потенциала в каком-либо направлении в некоторой точке определяет соответствующую компоненту вектора напряженности электрического поля в этой точке:

$$\left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right| = E_x,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| = E_y,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right| = E_z.$$
(120)

Вектор напряженности направлен против градиента потенциала:

$$\vec{E} \uparrow \downarrow grad\varphi,$$
 (121)

т.е. вектор \vec{E} направлен в сторону максимального уменьшения потенциала. Вычислим напряженность поля точечного заряда с координатами {*x*, *y*, *z*}:

$$E_{x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{r} = -q\frac{\partial}{\partial x\sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}}} = -q\frac{\partial}{\partial x}(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{q}{2}(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{-\frac{3}{2}}2x = q\frac{qx}{r^{3}}.$$
(122)

Аналогично,

$$E_y = \frac{qy}{r^3},\tag{123}$$

$$E_z = \frac{qz}{r^3}.$$
(124)

Тогда:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) = \frac{q}{r^3}\vec{r}.$$
(125)

2.5. Электрический диполь. Потенциал диполя. Диполь-дипольное взаимодействие

Понятие дипольного момента используется при описании электрического взаимодействия нейтральных частиц и молекул друг с другом или с заряженными ионами (диполь-дипольное и ион-дипольное взаимодействие соответственно).

Система зарядов, имеющая суммарный заряд, равный нулю

$$Q = \sum q_i = 0 \tag{126}$$

создает электрическое поле, которое на больших расстояниях убывает быстрее, чем по закону Кулона ~ $1/r^2$. Такая система характеризуется уже не

зарядом, а дипольным (или квадрупольным, или мультипольным) моментом.



Рис. 2. Дипольный момент двух точечных зарядов +q и -q.

Дипольный момент зарядов $dq(\vec{r}_i)$, непрерывно распределенных в объеме V с плотностью $\rho(\vec{r}_i)$, равен

$$\rho = \iiint \vec{r_i} \, dq(\vec{r_i}) \tag{127}$$

при равном нулю суммарном заряде

$$\iiint dq(\vec{r}_i) = 0. \tag{128}$$

Дипольный момент системы точечных зарядов q_i , для которых суммарный заряд равен нулю $\sum q_i = 0$, выражается соотношением

$$\vec{p} = \sum_{i} \vec{r}_{i} q_{i}, \tag{129}$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор заряда q_i .

Дипольный момент системы, состоящий из двух точечных зарядов $(+q \ u - q)$ равен

$$\vec{p} = (q\vec{r}_{+} - q\vec{r}_{-}) = q\vec{l},$$
 (130)

где вектор \vec{l} направлен от отрицательного заряда -q к положительному заряду +q (рис. 2).

Диполь, для которого

$$\vec{l} \to 0, q \to \infty, \vec{p} = q\vec{l} = const,$$
 (131)

называется точечным диполем. Реальную систему зарядов (+q, -q) можно считать точечным диполем на расстояниях $r \gg l$.

Получим выражения для потенциала и напряженности электрического поля, создаваемого точечным диполем. Характеристики поля дипольного момента можно определить, используя принцип суперпозиции полей всех точечных зарядов, входящих в систему. Рассмотрим точечный диполь, состоящий из двух точечных зарядов (рис. 3).



Рис. 3. К вычислению потенциала поля $\varphi(\vec{r})$, создаваемого точечным (при $r \gg l$) диполем.

Потенциал поля диполя равен сумме потенциалов двух точечных зарядов:

$$\varphi = \varphi_{+} + \varphi_{-} = \left[\frac{q}{r} + \frac{-q}{\left|\vec{r} + \vec{l}\right|}\right] = \frac{q}{r} \left[1 - \frac{1}{\left|\vec{r}/r + \vec{l}/r\right|}\right].$$
(132)

Преобразуем второе слагаемое в скобках:

$$\left(\vec{r}/r + \vec{l}/r\right)^{-1} = \left(\left(\vec{r}/r + \vec{l}/r\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + 2\frac{\left(\vec{r}\vec{l}\right)}{r^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
 (133)

Для точечного диполя ($r \gg l$), выражение упрощается

$$\left(1+2\frac{(\vec{r}\vec{l})}{r^2}+\frac{l^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{(\vec{r}\vec{l})}{r^2}.$$
(134)

Учитывая, что $\vec{p} = q\vec{l}$, для потенциала точечного диполя получаем

$$\varphi = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}.$$
(135)

Потенциал точечного диполя определен во всем пространстве, кроме точки локализации диполя.

Напряженность поля точечного диполя согласно (115) равна

$$\vec{E} = -grad\left(\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}\right).$$
(136)

Вычислим x – компоненту $grad\left(\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^{3}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_{x}x + p_{y}y + p_{z}z}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{3/2}}\right).$$
(137)

Учитывая, что \vec{p} не зависит от x, после дифференцирования получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} = \frac{p_x r^2 - 3(\vec{p}\vec{r})x}{r^5}.$$
(138)

Аналогично, для у и z – компонентов получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} = \frac{p_y r^2 - 3(\vec{p}\vec{r})y}{r^5},\tag{139}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} = \frac{p_z r^2 - 3(\vec{p}\vec{r})z}{r^5}.$$
(140)

Таким образом, вектор напряженности поля точечного диполя выражается следующим соотношением:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}.$$
(141)

Поле точечного диполя является центрально несимметричным (рис. 4).



Рис. 4. Разложение вектора напряженности поля \vec{E} точечного диполя по радиус-вектору \vec{r} и направлению диполя \vec{p} .

Наряду с \vec{r} – компонентой

$$\vec{E}_{r} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^{5}}$$
(142)

оно характеризуется компонентой вдоль вектора \vec{p}

$$\vec{E}_{p} = \frac{-\vec{p}r^{2}}{r^{5}}.$$
(143)

Рис. 5. Разложение вектора напряженности поля \vec{E} точечного диполя по ортам полярных координат \vec{e}_r и \vec{e}_{θ} .

В полярных координатах (рис. 5), если угол θ отсчитывать от направления дипольного момента, компоненты вектора напряженности поля точечного диполя записываются в виде

$$E_r = \frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^4} - E_p \cos\theta = \frac{2p}{r^3}\cos\theta, \qquad (144)$$

$$E_{\theta} = E_p \sin\theta = \frac{p}{r^3} \sin\theta. \tag{145}$$

Таким образом, вектор напряженности в полярных координатах имеет вид

$$\vec{E} = \frac{p}{r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta), \tag{146}$$

а модуль напряженности

$$E = \frac{p}{r^3} (3\cos^2\theta + 1),$$
 (147)

где \vec{p} – дипольный момент; \vec{r} – радиус-вектор из точки локализации диполя в точку наблюдения.

Диполь – дипольное взаимодействие – взаимодействие между электрическими диполями.

Каждый электрический диполь создаёт в окружающем пространстве электрическое поле, воздействующее на другой диполь. Напряжённость поля электрического диполя определяется выражением (141)

Определим выражение для потенциальной энергии диполя в однородном электрическом поле

$$W = q\left(\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} - \vec{l})\right) = (grad\varphi)q\vec{l} = -\vec{E}\vec{p}.$$
(148)

Энергия диполь-дипольного взаимодействия $W_{1,2}$ двух диполей с моментами $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$, находящихся в точках $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$.

$$W_{1,2} = -\left(\frac{3(\vec{p}_{1}\vec{r}_{1,2})}{r_{1,2}^{5}} - \frac{\vec{p}_{1}}{r_{1,2}^{3}}\right)\vec{p}_{2} = -\frac{3(\vec{p}_{1}\vec{r}_{1,2})(\vec{p}_{2}\vec{r}_{1,2})}{r_{1,2}^{5}} + \frac{\vec{p}_{1}\vec{p}_{2}}{r_{1,2}^{3}} = \frac{\vec{p}_{1}\vec{p}_{2}(\cos\theta_{1,2} - 3\cos\theta_{1}\cos\theta_{2})}{r_{1,2}^{3}},$$
(149)

где $\vec{r_{1,2}} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$, $\theta_{1,2}$ - угол между векторами $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$, θ_1 и θ_2 - углы между векторами $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ и вектором $\vec{r}_{1,2}$; $W_{1,2}$ - энергия диполя $\vec{p_2}$ в поле диполя $\vec{p_1}$.

Полная энергия диполь-дипольного взаимодействия для системы диполей является суммой энергий всех парных дипольных взаимодействий.

Энергия диполь-дипольного взаимодействия зависит от взаимного расположения диполей. Например, для пары диполей с одинаковыми дипольными моментами \vec{p} при «горизонтальной» ориентации дипольных моментов (рис. 6) эта энергия минимальна ($W = -\frac{2p^2}{r^3}$), когда дипольные моменты параллельны; при «вертикальной» ориентации дипольных моментов (рис. 7) энергия диполь-дипольного взаимодействия минимальна ($W = -\frac{p^2}{r^3}$), когда дипольные моменты антипараллельны.



Рис. 6. Две пары диполей с одинаковыми дипольными моментами \vec{p} при «горизонтальной» ориентации дипольных моментов.



Рис. 7. Две пары диполей с одинаковыми дипольными моментами \vec{p} при «вертикальной» ориентации дипольных моментов.

2.6. Заряд вблизи поверхности проводника. Метод зеркальных изображений. Сила притяжения заряда к поверхности незаряженного проводника

Рассмотрим сначала граничные условия для векторов \vec{D} и \vec{E} . Для нормальных составляющих векторов \vec{D} и \vec{E} следуют из теоремы Гаусса. Выделим вблизи границы раздела замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к границе раздела, а основания находятся на равном расстоянии от границы (рис. 8).



Рис. 8. Замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к границе раздела, а основания находятся на равном расстоянии от границы.

Так как на границе раздела диэлектриков нет свободных зарядов, то, в соответствии с теоремой Гаусса, поток вектора электрической индукции через данную поверхность

$$\oint \vec{D} \, dS = 0. \tag{150}$$

Выделяя потоки через основания и боковую поверхность цилиндра

$$\oint \vec{D} \, dS = D_{2n} S - D_{1n} S + \langle D_{\tau} \rangle S_{60\kappa} = 0, \tag{151}$$

где $\langle D_{\tau} \rangle$ - значение D_{τ} касательной составляющей усредненное по боковой поверхности $S_{\text{бок}}$. Переходя к пределу при $h \to 0$ (при этом $S_{\text{бок}}$ также стремится к нулю), получаем

$$D_{2n}S - D_{1n}S = 0 (152)$$

или окончательно для нормальных составляющих вектора электрической индукции

$$D_{2n}S = D_{1n}S.$$
 (153)

Для нормальных составляющих вектора напряженности поля получим

$${}^{E_{1n}}/_{E_{2n}} = {}^{\varepsilon_2}/_{\varepsilon_1}.$$
(154)

Таким образом, при переходе через границу раздела диэлектрических сред нормальная составляющая вектора \vec{E} терпит разрыв, а нормальная составляющая вектора \vec{D} непрерывна.

Граничные условия для касательных составляющих векторов \vec{D} и \vec{E} следуют из соотношения, описывающего циркуляцию вектора напряженности электрического поля. Построим вблизи границы раздела прямоугольный замкнутый контур длины *l* и высоты *h* (рис. 9).



Рис. 9. Прямоугольный замкнутый контур длины *l* и высоты *h* вблизи границы раздела сред.

Учитывая, что для электростатического поля

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = 0, \tag{155}$$

и, обходя контур по часовой стрелке, представим циркуляцию вектора \vec{E} в следующем виде:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = E_{1\tau} l - E_{2\tau} l + \langle E_n \rangle h = 0, \tag{156}$$

где $\langle E_n \rangle$ - среднее значение E_n на боковых сторонах прямоугольника. Переходя к пределу при $h \to 0$, получим для касательных составляющих \vec{E}

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$
 (157)

Для касательных составляющих вектора электрической индукции граничное условие имеет вид

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \varepsilon_1/\varepsilon_2. \tag{158}$$

Таким образом, при переходе через границу раздела диэлектрических сред касательная составляющая вектора \vec{E} непрерывна, а касательная составляющая вектора \vec{D} терпит разрыв.

Определим силу притяжения заряда к поверхности незаряженного проводника методом зеркальных изображений.

Пусть точечный заряд +q находится на расстоянии *a* от бесконечной проводящей, например, металлической плоскости с нулевым потенциалом (рис. 10).


Рис. 10 Картина силовых линий электростатического поля заряда +q и поверхности с наведенным на ней зарядом -q.

По индукции заряд +q будет наводить заряд противоположного знака на поверхности. Это свободные заряды (в металлах - электроны), притянутые положительным зарядом с каких-то далеких областей плоскости, либо, пришедшие из земли, если поверхность заземлена. Суммарный индуцированный заряд равен -q и будет каким-то образом распределен по поверхности.

На точечный заряд +q со стороны поверхности действует сила притяжения к поверхности (так как наведенные заряды отрицательны). Величина силы притяжения не равна q^2/a^2 , поскольку отрицательный заряд не сосредоточен в одной точке, а распределен по плоскости. Поэтому значение силы меньше, чем величина q^2/a^2 .

Поверхность проводника эквипотенциальна, что означает, что все точки этой поверхности имеют равный потенциал (B нашем случае потенциал поверхности равен нулю). Силовые линии поля перпендикулярны поверхности (составляющая электрического поля, параллельная поверхности, вызовет движение зарядов в проводнике, которое прекратится лишь тогда, проводнике эта составляющая поля В будет полностью когда скомпенсирована полем, создаваемым индуцированными зарядами). Вблизи точечного заряда картина силовых линий близка к той, которую мы имеем для одиночного заряда. Силовые линии начинаются на заряде +q, поскольку он положительный. Таким образом, имеем картину силовых линий электростатического поля заряда +q и поверхности с наведенным на ней зарядом -q, которая изображена на рис. 10.

Картина силовых линий двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных на расстоянии 2*a* изображена на рис. 11.



Рис. 11. Картина силовых линий двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных на расстоянии 2*a*.

В случае двух точечных зарядов одна из эквипотенциальных поверхностей плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему заряды и делящая его пополам, то есть она расположена там же, где металлическая плоскость. Потенциал любой точки этой плоскости равен нулю. В обоих случаях поле вблизи заряда +q одно и то же. А поскольку поле одно и то же, то и силы, действующие на заряд +q в обоих случаях одинаковы. Таким образом, искомая сила равна

$$F = \frac{q^2}{4a^2}.$$
(159)

Таким образом, задача о заряде и поверхности свелась к задаче о двух точечных зарядах методом подбора величины и положения заряда -q, который является зарядом-изображением, таким образом, чтобы поле в области между зарядом +q и поверхностью в обеих задачах было одинаковым.

2.7. Взаимодействие диполя с поверхностью незаряженного проводника.

Определим энергию притяжения электрического диполя к плоской поверхности проводника.

Рассмотрим два случая, когда диполь вблизи плоской поверхности проводника перпендикулярен к ней (рис. 12) и, когда параллелен поверхности проводника (рис. 13).



Рис. 12. Диполь вблизи плоской поверхности проводника и перпендикулярен к поверхности проводника

Пусть ось *x* перпендикулярна к поверхности проводника. Диполь \vec{p} расположен в плоскости *x*, *y*. Расстояние между поверхностью проводника и диполем определяется радиус вектором \vec{r} . Энергия притяжения диполя вычисляется как энергия взаимодействия диполя \vec{p} с его изображением \vec{p}' . Расстояние между диполями определяется вектором \vec{r}_{12} .

Рассмотрим первый случай. Как видно из рис. 12 $\vec{p}' = \vec{p}$. Выражение для энергии диполь-дипольного взаимодействия имеет вид

$$W = -\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r}_{12})\vec{r}_{12}}{\vec{r}_{12}^{5}} - \frac{\vec{p}}{\vec{r}_{12}^{3}}\right)\vec{p}' = -\left(\frac{3p\cos(180^{\circ})(2r)^{2}}{(2r)^{5}} - \frac{p}{(2r)^{3}}\right)p =$$
(160)
$$= -\frac{p^{2}}{4r^{3}}.$$



Рис. 13 Диполь вблизи плоской поверхности проводника и параллелен поверхности проводника

Рассмотрим второй случай. Как видно из рис. 13 $\vec{p}' = -\vec{p}$. Выражение для энергии диполь-дипольного взаимодействия имеет вид

$$W = -\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r}_{12})\vec{r}_{12}}{\vec{r}_{12}^{5}} - \frac{\vec{p}}{\vec{r}_{12}^{3}}\right)\vec{p}' = -\left(\frac{3p\cos(90^{\circ})(2r)^{2}}{(2r)^{5}} - \frac{-p}{(2r)^{3}}\right)(-p) =$$

$$= -\frac{p^{2}}{8r^{3}}.$$
(161)

2.8. Заряд вблизи поверхности диэлектрика. Поле зарядов, индуцированных на поверхности диэлектрика. Расчет потенциалов внутри и вне диэлектрика

Пусть два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 граничат друг с другом вдоль плоскости *OO'*. В точке A первого диэлектрика помещен точечный заряд *q* (рис. 14). Найдем электрическое поле в каждом из диэлектриков. В окрестности точки A поле должно стремится к бесконечности, как кулоново поле точечного заряда *q*. Поэтому поле в первом диэлектрике должно содержать слагаемое $\frac{qr}{(\varepsilon_1 r^3)}$.



Рис. 14 Иллюстрация к расчету электрического поля в диэлектриках, при нахождении точечного заряда в одном из них.

К нему надо добавить поле поляризационных зарядов, возникших на границе раздела диэлектриков. Введем предположение, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещенного в точке A', зеркально симметричной с A относительно границы раздела. Тогда для поля в первом диэлектрике можно записать

$$\vec{E}_{1} = \frac{q}{\varepsilon_{1}r^{3}}\vec{r} + \frac{q'}{\varepsilon_{1}r'^{3}}\vec{r}',$$
(162)

где \vec{r} и \vec{r}' -радиус-векторы, проведенные из точек нахождения зарядов q и q' в рассматриваемую точку.

Введем второе предположение, что поле во втором диэлектрике представляется выражением

$$\vec{E}_2 = \frac{q^{\prime\prime}}{\varepsilon_1 r^3} \vec{r},\tag{163}$$

причем второй фиктивный заряд q'' совмещен пространственно с зарядом q. Теперь необходимо выражения для \vec{E}_1 и \vec{E}_2 «сшить», чтобы на границе

раздела диэлектриков удовлетворялись граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора \vec{E} и нормальных компонент вектора \vec{D} . Первое условие имеет вид

$$\frac{q}{\varepsilon_1}\sin\varphi + \frac{q'}{\varepsilon_1}\sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_1}\sin\varphi,$$
(164)

а второе

$$q\cos\varphi - q'\cos\varphi = q''\cos\varphi. \tag{165}$$

Если q' и q'' определить из тих уравнений, то граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела. Таким образом, находим

$$\vec{E}_{1} = \frac{q}{\varepsilon_{1}r^{3}}\vec{r} - \frac{1}{\varepsilon_{1}}\frac{\varepsilon_{2} - \varepsilon_{1}}{\varepsilon_{1} + \varepsilon_{2}}\frac{q'}{r'^{3}}\vec{r}',$$

$$\vec{E}_{2} = \frac{2}{\varepsilon_{1} + \varepsilon_{2}}\frac{q}{r^{3}}\vec{r}.$$
(166)

Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q'}{r'} -$$
(167)

значение потенциала в среде с ε_1 , где находится заряд;

$$\varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r} - \tag{168}$$

значение потенциала в среде с ε_2 .

2.9. Поверхностный плазмон. Частота поверхностного плазмона в модели Друде-Лоренца

Рассмотрим случай с границей раздела воздух-металл. В этом случае $\varepsilon_1 = 1$, а для ε_2 применимо выражение для друдевского металла: $\varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}$.

Найдем частоту поверхностного плазмона на границе друдевского металла. Поверхностный плазмон имеет место при условии равенства нулю знаменателя $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ в выражение для напряженности поля в среде определяется формулой (166), то есть

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0. \tag{169}$$

Подставляя значения для ε_1 и ε_2 определяем, что частота поверхностного плазмона равна

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}.$$
(170)

2.10. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле.

Рассмотрим диэлектрический шар во внешнем поле \vec{E}_0 (рис. 15). Обозначим диэлектрическую проницаемость шара посредством ε , а диэлектрическую проницаемость внешней среды, в которую он помещен $\varepsilon_{срелы}$.



Рис. 15. Иллюстрация для расчета поля, создаваемого диэлектрическим шаром с диэлектрической проницаемостью ε , помещенного в диэлектрическую среду $\varepsilon_{\rm среды}$ во внешнем поле \vec{E}_0 .

Внутри шара поле однородно. Поле вне шара можно заменить на поле диполя, который помещен в центре шара.

Направим ось *х* вдоль направления вектора напряженности внешнего поля \vec{E}_0 . Тогда, так как $E = -grad\varphi$ (115)

$$\varphi_0 = -E_0 x - \tag{171}$$

потенциал поля \vec{E}_0 .

Потенциал поля внутри шара

$$\varphi_{\rm внутри} = -E_{\rm внутри} x. \tag{172}$$

Потенциал поля снаружи определяется выражением

$$\varphi_{\rm снаружи} = \varphi_0 + \varphi_{\rm диполя},\tag{173}$$

где потенциал поля диполя $\varphi_{\text{диполя}} = \frac{px}{r^3}$.

Выпишем условия, которые должны удовлетворятся на границе шара:

$$\varphi_{\text{снаружи}} = \varphi_0 + \varphi_{\text{диполя}} = \varphi_{\text{внутри}},$$
 (174)

$$-E_0 x|_{\text{на пов-ти сферы}} + \frac{px}{r^3}\Big|_{\text{на пов-ти сферы}} = -E_{\text{внутри}} x\Big|_{\text{на пов-ти сферы}}.$$
 (175)

Касательные компоненты вектора напряженности поля \vec{E} на границе шара совпадают

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2},$$
 (176)

$$D_{n1} = D_{n2}.$$
 (177)

Рассмотрим касательные компоненты вектора напряженности поля \vec{E} в точке $\{x = 0, y = a, z = 0\}$.

В данном случае внутренняя касательная компонента: Евнутри.

Наружная касательная компонента:

$$E_{\rm hap} = E_0 + E_{\rm диполя},\tag{178}$$

где $\vec{E}_{диполя} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$

В точке {x = 0, y = a, z = 0}:

$$\vec{E}_{\text{диполя}} = -\frac{\vec{p}}{a^3}.$$
(179)

Следовательно,

$$E_{\rm Hap} = E_0 - \frac{p}{a^3}.$$
 (180)

Таким образом, получаем

$$E_{\rm BHYTPH}\Big|_{y=a} = E_0\Big|_{y=a} - \frac{p}{a^3}\Big|_{y=a}.$$
 (181)

На полюсах {x = a, y = 0, z = 0} выполняется условие

$$D_{
m внутриn} = D_{
m chapyжиn},$$

 $D_{
m внутриn} = \varepsilon E_{
m внутри},$ (182)

$$D_{\text{снаружил}} = \varepsilon_{\text{среды}} (E_0 + E_{\text{диполя}})$$

 $D_{n1} = D_{n2}$

где $\vec{E}_{диполя} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$

В точке {x = a, y = 0, z = 0}:

$$E_{\rm диполя} = \frac{3paa}{a^5} - \frac{p}{a^3} = \frac{2p}{a^3}.$$
 (183)

Следовательно,

$$E_{\rm Hap} = E_0 + \frac{2p}{a^3},$$
 (184)

$$D_{\text{снаружил}} = \varepsilon_{\text{среды}} \left(E_0 + \frac{2p}{a^3} \right).$$
 (185)

Таким образом, получаем

$$\varepsilon E_{\rm внутри}\Big|_{x=a} = \varepsilon_{\rm среды} (E_0 + \frac{2p}{a^3})\Big|_{x=a}.$$
(186)

Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} E_{\text{внутри}} \Big|_{y=a} = E_0 \Big|_{y=a} - \frac{p}{a^3} \Big|_{y=a} \\ \varepsilon E_{\text{внутри}} \Big|_{x=a} = \varepsilon_{\text{среды}} (E_0 + \frac{2p}{a^3}) \Big|_{x=a} \end{cases}$$
(187)

$$\varepsilon \left(E_0 - \frac{p}{a^3} \right) = \varepsilon_{\text{среды}} \left(E_0 + \frac{2p}{a^3} \right). \tag{188}$$

Из этого выражения получаем выражение для дипольного момента

$$p = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды})}{(\varepsilon + 2\varepsilon_{\rm среды})} a^3 E_0.$$
(189)

Напряженность поля внутри диполя

$$E_{\rm внутри} = E_0 - \frac{\left(\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды}\right)}{\left(\varepsilon + 2\varepsilon_{\rm среды}\right)} E_0 = \frac{3\varepsilon_{\rm среды}}{\varepsilon + 2\varepsilon_{\rm среды}} E_0.$$
(190)

2.11. Локализованный плазмон.

Локализованный поверхностный плазмон присутствует В мелких металлических частицах (наночастицах). При достаточно малых размерах (диаметр частицы меньше длины входящего частиц волны электромагнитного излучения), рассмотрена она может быть как колеблющийся диполь.

Определим частоты собственных колебаний сферических частиц. Пусть частица находится в вакууме, т.е. $\varepsilon_{\rm среды}=1$

$$E_{\rm внутри} = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0, \tag{191}$$

тогда

$$\varepsilon + 2 = 0 - \tag{192}$$

условие возникновение локализованного плазмонного резонанса в частице.

Подставляя в это выражение закон дисперсии Друде $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$, получаем

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i\gamma)} = 3. \tag{193}$$

Решая квадратное уравнение

$$3\omega^2 + 3\omega i\gamma - \omega_p^2 = 0, \qquad (194)$$

находим резонансные частоты

$$\omega_{1,2} = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{3}}.$$
(195)

При $\gamma \rightarrow 0$

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}} - \tag{196}$$

частота возбуждение локализованного плазмона в сферических частицах. Для случая сферической полости в диэлектрической среде в выражении (190) ε = 1. Тогда

$$E_{\rm внутри} = \frac{3\varepsilon_{\rm среды}}{1 + 2\varepsilon_{\rm среды}} E_0.$$
(197)

Найдем резонансную частоту для полости в среде:

$$\varepsilon_{\rm среды} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

 $1 + 2\varepsilon_{\rm среды} = 0,$
(198)

$$\frac{2\omega_p^2}{\omega^2} = 3.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_p - \tag{199}$$

частота возбуждение локализованного плазмона для сферической полости в среде.

Глава 3. Плазмонные наночастицы

3.1. Проводящий эллипсоид в однородном внешнем поле. Геометрический фактор

Гладкой частицей наиболее общего вида, имеющей регулярную форму, является эллипсоид с полуосями a > b > c, поверхность которого задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
 (200)

Задачу об определении поля заряженного проводящего эллипсоида, естественно рассматривать в эллипсоидальных координатах (ξ , η , ζ), определяемых соотношениями

$$\frac{x^{2}}{a^{2}+\xi} + \frac{y^{2}}{b^{2}+\xi} + \frac{z^{2}}{c^{2}+\xi} = 1, \quad -c^{2} < \xi < \infty;$$

$$\frac{x^{2}}{a^{2}+\eta} + \frac{y^{2}}{b^{2}+\eta} + \frac{z^{2}}{c^{2}+\eta} = 1, \quad -b^{2} < \eta < -c^{2}; \quad (201)$$

$$\frac{x^{2}}{a^{2}+\zeta} + \frac{y^{2}}{b^{2}+\zeta} + \frac{z^{2}}{c^{2}+\zeta} = 1, \quad -a^{2} < \zeta < -b^{2}.$$

Поверхности $\xi = const$ являются конфокальными эллипсоидами, а один эллипсоид $\xi=0$ совпадает с границей частицы. Поверхности $\eta = const -$ это однополосные гиперболоиды, а поверхности $\zeta = const -$ двухполостные гиперболоиды. Каждой точке (x, y, z) отвечает одно семейство эллипсоидальных координат (ξ, η, ζ) ; обратное неверно. Координаты (ξ, η, ζ) определяют восемь точек, симметрично расположенных в каждом из октантов, на которые пространство делится осями x, y, z прямоугольной системы координат:

$$x^{2} = \frac{(a^{2} + \xi)(a^{2} + \eta)(a^{2} + \zeta)}{(b^{2} - a^{2})(c^{2} - a^{2})},$$

$$y^{2} = \frac{(b^{2} + \xi)(b^{2} + \eta)(b^{2} + \zeta)}{(a^{2} - b^{2})(c^{2} - b^{2})},$$

$$z^{2} = \frac{(c^{2} + \xi)(c^{2} + \eta)(c^{2} + \zeta)}{(a^{2} - c^{2})(b^{2} - c^{2})}.$$
(202)

Элемент длины в эллипсоидальных координатах имеет вид

$$dl^{2} = h_{1}^{2}d\xi^{2} + h_{2}^{2}d\eta^{2} + h_{3}^{2}d\zeta^{2},$$

$$h_{1} = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_{\xi}}, h_{2} = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2R_{\eta}}, h_{3} = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_{\zeta}},$$
(203)

где введены обозначения

$$R_{\xi} = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)},$$

$$R_{\eta} = \sqrt{(\eta + a^2)(\eta + b^2)(\eta + c^2)},$$

$$R_{\zeta} = \sqrt{(\zeta + a^2)(\zeta + b^2)(\zeta + c^2)}.$$
(204)

Соответственно уравнение Лапласа $\Delta \varphi = 0$ в этих координатах есть

$$\Delta \varphi = \frac{4}{(\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta)} \left[(\eta - \zeta) R_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right] = 0.$$
(205)

Эллипсоид, поверхность которого задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в эллипсоидальных координатах соответствует координатной плоскости $\xi=0$. Если искать потенциал поля в виде функции только от ξ , то автоматически будут эквипотенциальными все эллипсоидальные поверхности $\xi = const$, в том числе поверхность проводника. Уравнение Лапласа сводится тогда к уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0, \tag{206}$$

откуда

$$\varphi(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}.$$
(207)

Верхний предел интегрирования выбран таким образом, чтобы обеспечить исчезновения поля на бесконечности. Постоянную *A* проще всего определить из условия, что на больших расстояниях *r* поле должно стремиться к кулоновскому: $\varphi \approx q/r$, где q – полный заряд проводника. Стремлению $r \rightarrow \infty$ соответствует $\xi \rightarrow \infty$; при этом $r^2 \approx \xi$ (следует из уравнения

 $\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1$). С другой стороны, для больших ξ имеем $R_{\xi} \approx \xi^{3/2}$ и $\varphi \approx 2A/\sqrt{\xi} = 2A/r$.

Следовательно, 2A = q. Таким образом, получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}.$$
(208)

Стоящий здесь интеграл – эллиптический первого рода. Поверхности проводника соответствует значение $\xi=0$, поэтому для емкости эллипсоида имеем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}.$$
(209)

Распределение плотности заряда по поверхности эллипсоида определяется нормальной производной потенциала

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{h_1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{q}{4\pi \sqrt{\eta \zeta}}.$$
 (210)

Из уравнений (202) находим, что при $\xi=0$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^{2\prime}},$$
(211)

поэтому

$$\sigma = \frac{q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}, a > b > c.$$
(212)

Из выражения следует, что наибольший заряд распределен на вершинах самой большой оси, т.е. *а*.

Рассмотрим незаряженный проводящий эллипсоид, находящийся во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 . Без ограничения общности достаточно рассмотреть внешнее поле \vec{E}_0 , направленное вдоль одной из осей эллипсоида.

Потенциал однородного поля \vec{E}_0 , направленного вдоль оси x (ось a эллипсоида), в эллипсоидальных координатах имеет вид

$$\varphi_0 = -E_0 x = -E_0 \left[\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}.$$
(213)

Представим потенциал поля вне эллипсоида в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, где φ' определяет искомое искажение внешнего поля эллипсоидом, и будем искать φ' в виде

$$\varphi' = \varphi_0 F(\xi). \tag{214}$$

В функции φ' зависящие от η и ζ множители совпадают с таковыми в φ_0 . Такой вид функции удовлетворяет граничному условию при $\xi=0$ и произвольных η , ζ (на поверхности эллипсоида). Подставив выражение для φ' в уравнение Лапласа, получим для $F(\xi)$ уравнение

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln\left[R_{\xi}(\xi+a^2)\right] = 0.$$
(215)

Одно из решений этого уравнения есть F = const, а другое имеет вид

$$F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}}.$$
 (216)

Верхний предел интегрирования выбран так, чтобы на бесконечности $(\xi \to \infty)$ потенциал φ' стремился к нулю. Стоящий здесь интегралэллиптический второго рода.

На поверхности эллипсоида должно быть $\varphi = const$. Чтобы это условие могло выполнятся при $\xi=0$ и произвольных η, ζ надо положить $\varphi = 0$. Выбирая соответствующим образом коэффициент А в $F(\xi)$ (так, чтобы было F(0) = -1), получим следующее выражение для потенциала вокруг эллипсоида:

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}} \middle/ \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}} \right\}.$$
 (217)

Найдем вид потенциала φ' на больших расстояниях r от эллипсоида. Большим r соответствует большие значения координаты ξ , причем $r^2 \approx \xi$. Поэтому

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}} \approx \int_{r^2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{5/2}} = \frac{2}{3r^3}.$$
(218)

Для потенциала φ' получаем

$$\varphi' = \frac{E_0 x}{r^3} \frac{V}{4\pi L_a},$$
(219)

где $V = 4\pi abc/3$ – объем эллипсоида, а величина L_a , как и аналогичные величины L_b и L_c , определяются формулами:

$$L_{a} = \frac{abc}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^{2})R_{\xi}},$$

$$L_{b} = \frac{abc}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{d\eta}{(\eta + a^{2})R_{\xi}},$$

$$L_{c} = \frac{abc}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + a^{2})R_{\xi}}.$$
(220)

Выражение для φ' имеет вид потенциала поля электрического диполя:

$$\varphi' = p_x \frac{x}{r^3},$$

$$p_x = E_{0x} \frac{V}{4\pi L_a}.$$
(221)

Аналогичными выражениями определяются дипольные моменты при поле \vec{E}_0 вдоль оси *у* или *z*.

Положительные постоянные L_a , L_b и L_c зависят только от формы эллипсоида и называются коэффициентами деполяризации.

В общем случае произвольных значений a, b, c из определений L_a, L_b, L_c следует прежде всего

$$L_a < L_b < L_c. \tag{222}$$

Далее, сложив интегралы L_a, L_b, L_c и введя в качестве переменной интегрирования $u = R_{\xi, \eta, \zeta}^2$, найдем

$$L_a + L_b + L_c = \frac{abc}{2} \int_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$
(223)

откуда

$$L_a + L_b + L_c = 1. (224)$$

Сумма трех коэффициентов деполяризации равна 1.

3.2. Диэлектрический эллипсоид в однородном внешнем поле. Наведенный дипольный момент и поле внутри эллипсоида

Эллипсоид с произвольным соотношением осей a, b, c и диэлектрической проницаемостью ε , помещенный во внешнее однородное поле, создает внутри себя однородное поле.

Потенциал поля вне эллипсоида имеет вид

$$\varphi'_{\rm BHe} = \varphi_0 F(\xi) \tag{225}$$

с функцией $F(\xi)$, где

$$F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}}.$$
 (226)

В потенциал же поля внутри эллипсоида $\varphi_{внутри}$ функция такого вида войти не может, так как она не удовлетворяет условию конечности поля во всем объеме внутри эллипсоида. Рассмотрим поверхность $\xi = -c^2$, представляющую собой часть плоскости x, y, ограниченную эллипсом с полуосями $(a^2 - c^2)^{1/2}$ и $(b^2 - c^2)^{1/2}$, лежащим внутри объема эллипсоида. При $\xi \to -c^2$ интеграл $F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_{\xi}}$ ведет себя как $\sqrt{\xi+c^2}$. Напряженность поля, т.е. градиент потенциала, ведет себя, следовательно, как $(\xi + c^2)^{-1/2}$ и обращается в бесконечность при $\xi = -c^2$. Таким образом, для поля внутри эллипсоида пригодно лишь решение $F(\xi) = const$, т.е. $\varphi_{внутри}$ надо искать в виде

$$\varphi_{\rm BHYTDM} = B\varphi_0. \tag{227}$$

Потенциал $\varphi_{внутри}$ отличается от потенциала однородного поля φ_0 только постоянным множителем. Поле внутри эллипсоида будет однородным.

Пусть эллипсоид находится в пустоте $\varepsilon_{\rm среды} = 1$. Тогда между векторами $E_{\rm внутри}$, $D_{\rm внутри}$, E_0 (все направлены вдоль оси x) должна существовать линейная связь вида

$$aE_{\rm внутриx} + bD_{\rm внутриx} = E_{0x},\tag{228}$$

где *a*, *b* зависят не от диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\rm среды}$ эллипсоида, *a* только от его формы. Наличие такой связи следует из вида граничных условий.

Определим *a*, *b*. В частном случае, когда $\varepsilon = 1$ было бы просто $\vec{E} = \vec{D} = \vec{E_0}$, следовательно, a+b=1. Другой частный случай – проводящий эллипсоид. В проводнике $\vec{E}_{\rm внутри} = 0$, а индукция $\vec{D}_{\rm внутри}$ не имеет непосредственного физического смысла, но может рассматриваться как формальная величина, связанная с полным дипольным моментом эллипсоида соотношением

$$\vec{D}_{\rm внутри} = 4\pi \vec{P} = \frac{4\pi}{V} \vec{P}_0.$$
(229)

Так как дипольный момент эллипсоида $P_{0x} = E_{0x} \frac{V}{4\pi L_a}$, то

$$D_{\rm внутриx} = E_{0x}/L_a, \tag{230}$$

т.е. коэффициент $b = L_a$, следовательно, $a = 1 - L_a$.

Таким образом,

$$(1 - L_a)E_{\text{внутри}x} + L_a D_{\text{внутри}x} = E_{0x},$$

$$E_{\text{внутри}x} = E_{0x} - 4\pi L_a P_x.$$
(231)

Величину $4\pi L_a P_x$ называют деполяризующим полем. Такие же соотношения (с коэффициентами L_b , L_c) справедливы для полей вдоль осей *y*, *z*.

Учитывая, что $D_{внутриx} = \varepsilon E_{внутриx}$, для напряженности поля внутри эллипсоида получаем:

$$E_{\rm BHYTPUX} = \frac{E_{0x}}{1 + (\varepsilon - 1)L_a},\tag{232}$$

а дипольный момент эллипсоида

$$P_{0x} = VP_x = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon - 1) V E_{\text{внутрих}} = \frac{abc}{3} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)L_a} E_{0x}.$$
 (233)

Переход к случаю диэлектрической проницаемости среды, отличной от 1, совершается просто путем замены ε на $\varepsilon/\varepsilon_{среды}$:

$$E_{\rm внутриx} = \frac{E_{0x}}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_{\rm среды} - 1)L_a}.$$
(234)

Эта формула может быть применима, в частности, к полю внутри эллипсоидального отверстия в неограниченной диэлектрической среде: для этого надо положить $\varepsilon = 1$.

Найдем резонансные частоты для эллипсоидальной частицы:

$$1 + (\varepsilon - 1)L_a = 0, \tag{235}$$

где $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$.

$$1 - \frac{\omega_{\rm p}^2 L_a}{\omega(\omega + i\gamma)} = 0, \tag{236}$$

$$\omega = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{i\gamma}{4}\right)^2 + \omega_{\rm p}^2 L_a},\tag{237}$$

Если $\gamma \ll \omega_p$, то

$$\omega = \omega_p \sqrt{L_a}.$$
 (238)

3.3. Частоты плазмонных резонансов в эллипсоидальных частицах с диэлектрической проницаемостью Друде-Лоренца. Предельные случаи

При разных соотношениях между L_a , L_b , L_c

$$L_a: L_b: L_c \approx \frac{1}{a}: \frac{1}{b}: \frac{1}{c}.$$
(239)

$$L_a = L_b = 0, \qquad L_c = 1, \qquad \omega = \omega_p \tag{240}$$

- тонкая круглая пластинка;

$$L_a = 0, \qquad L_b = L_c = \frac{1}{2}, \qquad \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$
 (241)

– длинный круговой цилиндр;

$$L_a = L_b = L_c = \frac{1}{3}, \qquad \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$$
 (242)

– шар.



Рис. 16. Связь между геометрическим фактором и резонансными диэлектрическими проницаемостями низших дипольных мод сфероидов. Стрелками показаны поляризации электрического поля.

Найдем максимально достижимое усиление внутреннего поля в условиях резонанса:

Представим ε в виде $\varepsilon = \varepsilon'_1 + i\varepsilon''_2$.

Таким образом, выражение для напряженности поля внутри эллипсоида примет вид

$$E_{\rm BHYTPUX} = \frac{E_{0x}/L_a}{\left[\epsilon_1' - (1 - 1/L_a)\right] + i\epsilon_2''}.$$
(243)

При

$$\varepsilon_1' - \left(1 - \frac{1}{L_a}\right) = 0$$
 (244)

для Е_{внутрих} достигается максимальное значение.

Таким образом,

$$E_{\rm BHYTPUX}^{max} = \frac{E_{0x}/L_a}{i\varepsilon_2^{\prime\prime}},\tag{245}$$

$$\left|\frac{E_{\text{внутрих}}^{max}}{E_{0x}}\right| = \frac{1}{\varepsilon_2^{\prime\prime} L_a}$$
(246)

при $\varepsilon'_1 = 1 - \frac{1}{L_a}$.

Найдем усиление поля на поверхности частицы. Напряженность поля на поверхности эллипсоида с внешней стороны определяется выражением:

$$E_{\rm снаружи} = \varepsilon E_{\rm внутри} \approx \varepsilon_1' E_{\rm внутри},$$
 (247)

$$\left|L_{a}^{\text{pesonanchoe}}\right| \approx \frac{1}{|\varepsilon_{1}'|},\tag{248}$$

$$\left|\frac{E_{\text{снаружи}}^{max}}{E_0}\right| \approx |\varepsilon_1'| \frac{1}{L_a^{\text{pesonanchoe}} \varepsilon_2''} \approx \frac{1}{\left(L_a^{\text{pesonanchoe}}\right)^2 \varepsilon_2''}.$$
(249)

Следовательно, усиление поля возрастает как с уменьшением геометрического фактора (эффект светящегося острия), так и с уменьшением потерь в веществе наночастицы ε_2'' .

3.4. Собственные колебания плазмонного типа в системе из двух частиц.

Расщепление плазмонного резонанса сферической частицы в присутствии второй частицы

Найдем дипольный момент, наведенный однородным полем \vec{E}_0 в системе из двух шарообразных частиц с радиусами a_1, a_2 и диэлектрической проницаемостью ε (рис. 17). Пусть расстояние между частицами – ρ .



Рис. 17. Иллюстрация к расчету дипольного момента, наведенный однородным полем \vec{E}_0 в системе из двух шарообразных частиц с радиусами a_1, a_2 и диэлектрической проницаемостью ε .

Приближение. Поле одного шара однородно на протяжении второго шара. Это приближение верно при a_1/ρ , $a_2/\rho \ll 1$.

Дипольный момент второй частицы

$$\vec{p}_2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_2^3 \vec{E}_1. \tag{250}$$

где \vec{E}_1 – поле в центре первой частицы.

Дипольный момент первой частицы

$$\vec{p}_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_1^3 \vec{E}_2. \tag{251}$$

де \vec{E}_2 – поле в центре первой частицы.

Поле внутри второй частицы выражается

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{дип.1}},\tag{252}$$

где

$$\vec{E}_{\text{дип.1}} = \frac{3\vec{\rho}(\vec{\rho}\vec{p}_1)}{\rho^5} - \frac{\vec{p}_1}{\rho^3} -$$
(253)

вектор напряженности поля точечного диполя \vec{p}_1 .

Поле внутри первой частицы выражается

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{дип.2}},\tag{254}$$

где

$$\vec{E}_{\text{дип.2}} = \frac{3\vec{\rho}(\vec{\rho}\vec{p}_2)}{\rho^5} - \frac{\vec{p}_2}{\rho^3} -$$
(255)

вектор напряженности поля точечного диполя \vec{p}_2 .

Рассмотрим два случая:

1.) $\vec{E}_0 \parallel \vec{\rho}$ — вектор напряженности внешнего поля ориентирован параллельно оси, соединяющей частицы.

$$E_{2} = E_{0} + \frac{2p_{1}}{\rho^{3}},$$

$$E_{1} = E_{0} + \frac{2p_{2}}{\rho^{3}}.$$
(256)

Подставляя выражения для E_1 , находим p_2

$$p_{2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3} \left(E_{0} + \frac{2p_{2}}{\rho^{3}} \right),$$

$$p_{2} = \frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3}}{\left(1 - \frac{2}{\rho^{3}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3} \right)} E_{0},$$

$$E_{1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\rho^{3}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3}} E_{0}.$$
(257)
(257)
(258)

Аналогичное выражение получаем для напряженности электрического поля внутри 2-ой частицы

$$E_2 = \frac{1}{1 - \frac{2}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_1^3} E_0.$$
(259)

В частицах возникают собственные колебания плазмонного типа, когда

$$1 - \frac{2}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_2^3 = 0 -$$
(260)

для первой частицы;

$$1 - \frac{2}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_1^3 = 0 -$$
(261)

для второй частицы.

После преобразования выражения (260) получаем:

$$\varepsilon + 2 = \frac{2a_2^3}{\rho^3}(\varepsilon - 1).$$
 (262)

Поправка. Так как диэлектрическая проницаемость сферической частицы $\varepsilon \approx -2$, подставим это значение в правую часть выражения (262). Получаем

...

$$\varepsilon = -\frac{6a_2^3}{\rho^3} - 2 -$$
(263)

резонансная диэлектрическая проницаемость системы.

Найдем резонансную частоту системы, учитывая, что $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$\omega_{\text{pes1.}\parallel} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3 + \frac{6a_2^3}{\rho^3}}},$$

$$\omega_{\text{pes2.}\parallel} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3 + \frac{6a_1^3}{\rho^3}}}.$$
(264)

2.) $\vec{E}_0 \perp \vec{\rho}$ — вектор напряженности внешнего поля ориентирован перпендикулярно оси, соединяющей частицы.

$$E_{2} = E_{0} - \frac{p_{1}}{\rho^{3}},$$

$$E_{1} = E_{0} - \frac{p_{2}}{\rho^{3}}.$$
(265)

Подставляя выражения для E_1 , находим p_2

$$p_{2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3} \left(E_{0} - \frac{p_{2}}{\rho^{3}} \right),$$

$$p_{2} = \frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3}}{\left(1 + \frac{1}{\rho^{3}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3} \right)} E_{0},$$

$$E_{1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho^{3}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_{2}^{3}} E_{0}.$$
(267)

Аналогичное выражение получаем для напряженности электрического поля внутри 2-ой частицы

$$E_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_1^3} E_0.$$
(268)

В частицах возникают собственные колебания плазмонного типа, когда

$$1 + \frac{1}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_2^3 = 0 -$$
(269)

для первой частицы

$$1 + \frac{1}{\rho^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a_1^3 = 0 -$$
(270)

для второй частицы. После преобразования выражения (269) получаем:

$$\varepsilon + 2 = -\frac{a_2^3}{\rho^3}(\varepsilon - 1)$$
 (271)

Поправка. Так как диэлектрическая проницаемость сферической частицы $\varepsilon \approx -2$, подставим это значение в правую часть выражения, получаем

$$\varepsilon = \frac{3a_2^3}{\rho^3} - 2 -$$
 (272)

резонансная диэлектрическая проницаемость системы.

Найдем резонансную частоту системы, учитывая, что $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$\omega_{\text{pe3.1}\perp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3 - \frac{3a_2^3}{\rho^3}}},$$

$$\omega_{\text{pe3.2}\perp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3 - \frac{3a_1^3}{\rho^3}}}.$$
(273)

Резонансная частота системы, состоящей из двух сферических частиц, уменьшается по отношению к частоте одной сферической частицы, когда вектор напряженности внешнего поля ориентирован параллельно оси, соединяющей частицы, и увеличивается, когда вектор напряженности внешнего поля ориентирован перпендикулярно оси, соединяющей частицы.

3.5. Распределение заряда в дипольных колебаниях пары частиц.

Представленный рисунок (рис. 18) иллюстрирует простой физический механизм, позволяющий понять, в каких плазмонных модах происходит увеличение частоты, а в каких уменьшение.



Рис. 18. Распределение заряда в дипольных колебаниях пары частиц.

Качественная картина объясняет сдвиги частот в системе из двух частиц:аизолированные наночастицы; б– пара близко расположенных наночастиц с возбуждающим полем, параллельным линии, соединяющей частицы. В этом

случае взаимодействие зарядов приводит к уменьшению частоты плазмонных колебаний; в– возбуждающее поле перпендикулярно линии, соединяющей частицы. В этом случае взаимодействие зарядов приводит к увеличению частоты плазмонных колебаний.

Глава 4. Проявления и применения плазмонных резонансов

4.1. Пропускание, оптическая плотность и экстинкция

Пропускание в оптике – прохождение сквозь среду оптического излучения без изменения набора частот составляющих его монохроматических излучений и их относительных интенсивностей.



Рис. 19. Прохождение сквозь среду оптического излучения.

Коэффициент пропускания равен отношению интенсивности излучения, прошедшего поглощающую среду I, к интенсивность излучения, падающего на поглощающую среду I_0 (рис. 19):

$$T = \frac{I}{I_0}.$$
(274)

Оптическая плотность (D) – мера непрозрачности слоя вещества толщиной l для световых лучей; характеризует ослабление оптического излучения в слоях различных веществ. Для неотражающего слоя

$$D = lg \frac{I_0}{I},\tag{275}$$

где I – интенсивность излучения, прошедшего поглощающую среду; I_0 – интенсивность излучения, падающего на поглощающую среду.

Экстинкция – ослабление пучка света при его распространении в веществе за счёт поглощения света и рассеяния света. Определяется выражением

$$1 - T.$$
 (276)

4.2. Индикатриса рассеяния (фазовая функция).

Сечения рассеяния и поглощения. Сечение экстинкции

Частица освещается светом. При помещении частицы в электромагнитное поле наводится дипольный момент. Диполь излучает.



Рис. 20. Определение угла рассеяния.

Запишем выражение для интенсивности рассеянного света в цилиндрических координатах. Если частица, рассеивающая свет не имеет цилиндрической симметрии, вводится угол φ – азимутальный угол (рис. 20)

$$I = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{r^2}.$$
(277)

Это выражение принято записывать, поделенным на волновой вектор $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$I = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2 r^2},\tag{278}$$

где $F(\theta, \varphi)$ – диаграмма рассеяния.

Рассчитаем весь рассеянный свет. Для этого возмем интеграл интенсивности по поверхности очень большой сферы:

$$\int IdS = \int \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2 R^2} R d\theta R \sin\theta d\varphi = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2} d\theta \sin\theta d\varphi, \qquad (279)$$

 $dS = Rd\theta Rsin\theta d\varphi = R^2 d\theta sin\theta d\varphi$ – элемент поверхности сферы;

 $d\Omega = d\theta sin \theta d\varphi$ – элемент телесного угла.

$$\int IdS = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2} d\Omega.$$
(280)

Сечением рассеяния *C*_{расс} называется отношение интеграла от рассеянного света к интенсивности падающего света.

$$C_{\text{pacc}} = \frac{\int I dS}{I_0} = \frac{1}{k^2} \int F(\theta, \varphi) \, d\Omega.$$
(281)

4.3. Амплитуда рассеяния. Оптическая теорема

Часть энергии, которая рассеивается диполем может быть поглощена самой частицей. Необходимо учитывать и поглощение. Сечение ослабления

$$C_{\rm экст(осл)} = C_{\rm pacc} + C_{\rm погл}.$$
(282)

Эффективность рассеяния (поглощения):

$$G = \pi a^2 - \tag{283}$$

площадь рассеяния;

$$Q_{\text{осл}} = \frac{C_{\text{экст(осл)}}}{G} -$$
(284)

эффективность

Пусть выбранная частица произвольного вида и строения освещается плоской скалярной волной бесконечной протяженности и распространяющейся вдоль направления $x: e^{ikx-i\omega t}$ (рис.21)



Рис. 21. Схема измерения ослабления одной частицей.

Поместим начало координат где-нибудь внутри частицы. Возмущение падающего света можно записать в виде:

$$E_0 = e^{ikz - i\omega t}. (285)$$

Рассеянная волна на большом расстоянии является сферически расходящейся волной с амплитудой, обратно пропорциональной расстоянию r (рис. 21). Поэтому ее можно записать в виде

$$E_{\text{pacc}} = \frac{S(\theta, \varphi)}{ikr} e^{ikr - i\omega t},$$
(286)

где r — модуль расстояния до точки наблюдения. Множитель i добавляют в знаменатель для удобства в дальнейшем, а множитель k для того, чтобы сделать $S(\theta, \varphi)$ безразмерной. $S(\theta, \varphi)$ — амплитудная функция рассеивающей частицы. Объединив два предыдущих выражения, имеем:

$$E_{\text{pacc}} = E_0 \frac{S(\theta, \varphi)}{ikr} e^{ikr - ikz},$$
(287)

$$E_{\text{полн}} = E_0 + E_{\text{pacc}} = E_0 \left(1 + \frac{S(\theta, \varphi)}{ikr} e^{ikr - ikz} \right).$$
(288)

Для направления вперед по оси $z: \theta = 0; S(\theta = 0, \varphi) = S(0)$ – амплитуда рассеяния волны вперед.

Интенсивность света, падающего на любую точку плоскости приемника, находится возведением в квадрат модуля выражения для $E_{\text{полн}}$

$$E_{\text{полн}}^{2} = \left| E_{0} + E_{\text{pacc}} \right|^{2} = E_{0}^{2} \left| 1 + \frac{S(0)}{ikr} e^{ikr - ikz} \right|^{2}.$$
 (289)

Интегрируя это выражение по всей площади приемника, найдем полную интенсивность:

$$\int E_{\Pi O \Pi H}^{2} dS = \int E_{0}^{2} dS + \int E_{0}^{2} \left| \frac{S(0)}{ikr} e^{ikr - ikz} \right|^{2} dS;$$
(290)

Напоминание:

$$\begin{split} |1+a|^2 &= (1+a)(1+a^*) = 1+a+a^*+|a|^2 = 1+2Re(a)+|a|^2 \approx \\ &\approx 1+2Re(a) \end{split}$$

$$\left|\frac{S(0)}{ikr}e^{ikr-ikz}\right|^{2} = 1 + 2Re\frac{S(0)}{ikr}e^{ikr-ikz} = 1 + 2S(0)Re\frac{e^{ikr-ikz}}{ikr};$$
$$\iint E_{\text{полн}} dxdy = \iint E_{0}^{2}dxdy + \iint 2E_{0}^{2}(0)Re\frac{e^{ikr-ikz}}{ikr} = E_{0}^{2}(\int_{0}^{\pi R^{2}} dS + 2S(0)\int_{0}^{\pi R^{2}}\frac{\sin(kr-kz)}{kr}dS);$$

Напоминание:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |x|, |y| \ll z,$$

$$r = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \sim z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z},$$

$$e^{ikr - ikz} = e^{ik(r-z)} = e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)}$$

$$\left|E_{0} + E_{\text{pacc}}\right|^{2} = E_{0}^{2} \left\{1 + 2Re \frac{S(0)}{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x^{2} + y^{2})}\right\}.$$
(291)

Полная интенсивность:

$$\iint E_{\Pi O \Pi H} dx dy = \iint E_0^2 \left\{ 1 + 2Re \frac{S(0)}{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \right\} dx dy.$$
(292)

Двойной интеграл по dxdy, с помощью которого определяется C_{экст(осл)}, содержит два интеграла Френеля, из которых каждый дает множитель

 $\sqrt{\frac{2\pi z}{ik}}$, если пределы становятся бесконечными. В результате получаем

$$C_{\rm экст(осл)} = \frac{4\pi}{k^2} Re\{S(0)\}.$$
(293)

Сделаем оценку: почему можно заменить пределы интегрирования на бесконечные.

$$R \gg \sqrt{\frac{2z}{k}}, \ k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
 $R \gg \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}} \approx \sqrt{z\lambda},$ где R – размер приемника.

Если $R \approx 1$ мм, то на расстоянии 10 м, пределы интегрирования можно заменить на бесконечные.

Определим ослабление в среде, содержащей рассеивающие частицы.



Рис. 22. Иллюстрация к определению ослабления в плоскопараллельном слое, содержащем много частиц.

Плоскопараллельный слой, содержащий множество одинаковых и одинаково ориентированных рассеивающих частиц, каждая из которых описывается амплитудной функцией $S(\theta, \varphi)$, освещается снизу (рис. 22). Пусть слой имеет

толщину l и пусть на единицу объема приходится N частиц. Поле в точке A обусловлено рассеянием на всех частицах слоя, но волна в точке A направленная вперед, подвергается когерентному влиянию только со стороны частиц в «активном объеме», который совпадает с несколькими центральными зонами Френеля, видимыми из точки A. При достаточно большом AO=z вклад дают только малые углы. Полная амплитуда в точке A тогда будет:

$$E_{\Pi O \Pi H} = E_0 \left\{ 1 + S(0) \sum \frac{1}{ikr} e^{\frac{-ik}{2r}(x^2 + y^2)} \right\},$$
(294)

где суммирование распространяется на все частицы в «активном объеме». Если имеется бесконечное множество таких частиц, то $\Sigma \rightarrow \int N dx dy dz$.

Непосредственное интегрирование дает:

$$E_{\text{полн}} = E_0 \left\{ 1 - \frac{2\pi}{k^2} NlS(0) \right\}.$$
 (295)

Этот результат формально можно представить как влияния комплексного показателя преломления среды в целом. Если рассматриваемый слой заменить слоем из однородного вещества с комплексным показателем преломления \tilde{m} , близким к 1, то слой изменит амплитуду волны на множитель

$$E \sim e^{-ikl(\tilde{m}-1)} = 1 - ikl(\tilde{m}-1).$$
(296)

Следовательно, формальный показатель преломления \widetilde{m} имеет значение

$$ikl(\tilde{m} - 1) = \frac{2\pi}{k^2} NlS(0),$$

$$\tilde{m} - 1 = \frac{2\pi}{ik^3} NS(0),$$

$$\tilde{m} = 1 - \frac{i2\pi}{k^3} NS(0).$$
(297)

Если выписать отдельно вещественную и мнимую части \widetilde{m}

$$\widetilde{m} = n - i\acute{n}. \tag{298}$$

Вещественная часть

$$n = 1 + \frac{2\pi}{k^3} NIm\{S(0)\}$$
(299)

определяет запаздывание (опережение) фазы волны, прошедшей через среду. Это есть не что иное как явление дисперсии: фазовая скорость волны, проходящей сквозь среду равна c/n.

Мнимая часть

$$\dot{n} = \frac{2\pi}{k^3} NRe\{S(0)\}$$
(300)

определяет уменьшение интенсивности.

Коэффициент поглощения в среде с комплексным показателем преломления $\alpha = 2k\dot{n}$. Таким образом, полный коэффициент ослабления

$$\alpha = 4\pi N k^{-2} Re\{S(0)\},\tag{301}$$

$$\alpha = NC_{\text{осл.}} \tag{302}$$

Таким образом, чтобы получить коэффициент поглощения, нужно просуммировать сечения ослабления всех частиц в объеме.

Интенсивность, прошедшего сквозь среду излучения выражается

$$I = I_0 \exp(-\alpha l) \approx I_0 (1 - \alpha l) = I_0 (1 - NC_{ocn} l).$$
(303)

4.4. Сечение поглощения для эллипсоидальной частицы с диэлектрической проницаемостью Друде-Лоренца

Рассмотрим частицы, малые по сравнению с длиной волны. Тогда частицу можно рассматривать как помещенную в однородное электрическое поле \vec{E}_0 , которое называется «действующим полем». Собственное поле частицы, обусловленное ее электрической поляризацией, видоизменяет это поле как внутри частицы, так и вблизи нее. Суммарное поле обозначим через \vec{E} . Пусть \vec{p} – индуцированный дипольный момент, из электростатики имеем

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_0. \tag{304}$$

Это соотношение определяет поляризуемость частицы α . В общем случае α является тензором. Это означает, что направления \vec{p} и \vec{E}_0 совпадают только тогда, когда поле приложено в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений. Пусть эти направления характеризуются единичными векторами \vec{n}_1, \vec{n}_2 и \vec{n}_3 . Тогда частица характеризуется тремя компонентами тензора α_1, α_2 и α_3 таким образом, что любое внешнее поле

$$\vec{E}_0 = E_1 \vec{n}_1 + E_2 \vec{n}_2 + E_3 \vec{n}_3 \tag{305}$$

дает дипольный момент

$$\vec{p} = \alpha_1 E_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 E_2 \vec{n}_2 + \alpha_3 E_3 \vec{n}_3. \tag{306}$$

Эти формулы, известные из электростатики, остаются неизменными, если действующим полем является периодическое поле падающей плоско поляризованной волны

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t},\tag{307}$$

тогда индуцированный дипольный момент будет

$$\vec{p}e^{-i\omega t}$$
. (308)

Компоненты тензора поляризуемости могут быть комплексными; они могут зависеть от ω . Колеблющийся диполь излучает во всех направлениях. Этот вид рассеяния называется релеевским рассеянием. Пусть точка Р находится на некотором расстоянии $r \gg \lambda$ от частицы и лежит в направлении, которое образует угол γ с \vec{p} . Электрическое поле рассеянной волны равно величине

$$E = \frac{k^2 p sin\gamma}{r} e^{-ikr},\tag{309}$$

умноженной на единичный вектор, направленный по компоненте вектора \vec{p} , перпендикулярной радиус-вектору.

Соответствующие интенсивности падающего и рассеянного излучения будут (усреднение по времени вектора Пойтинга)

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2, I = \frac{c}{8\pi} |E|^2.$$
(310)

Интегрируя *I* по большой сфере, находим, что полная энергия, рассеянная во всех направлениях в единицу времени, равна

$$W = \frac{1}{3}k^4c|p|^2.$$
 (311)

и деля это выражение на I_0 , получаем сечение рассеяния

$$C_{\rm pac.} = \frac{8}{3}\pi k^4 |\alpha|^2, \tag{312}$$

где $|\alpha|^2$ определяется соотношением

$$|\alpha|^{2} = l^{2} |\alpha_{1}|^{2} + m^{2} |\alpha_{2}|^{2} + n^{2} |\alpha_{3}|^{2}, \qquad (313)$$

а l, m, n-направляющие косинусы \vec{E}_0 относительно трех главных осей тензора поляризуемости.

Поглощающие частицы характеризуются комплексными значениями поляризуемости. В простом случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, амплитудная функция для $\theta = 0^{\circ}$ является скаляром

$$S(0) = ik^3\alpha, \tag{314}$$

так что с помощью общего соотношения

$$C_{\text{погл.}} = \frac{4\pi}{k^2} Re\{S(0)\}$$
(315)

находим

$$C_{\Pi 0 \Gamma \pi} = 4\pi k Re\{i\alpha\}. \tag{316}$$

Поправка. Использованное общее соотношение должно давать сечение ослабления, которое включает как рассеяние, так и поглощение. То, что при подстановке вещественного значения α результат равен 0, показывает, что рассеяние здесь не учтено. Это вызывается тем обстоятельством, что мы пренебрегли обратным действием излучения на колеблющийся диполь. Это обратное действие фактически вызывает небольшое запаздывание фазы \vec{p} по отношению к \vec{E}_0 даже для непоглощающей частице. Полное сечение ослабления есть

$$C_{\text{осл.}} = C_{\text{рас.}} + C_{\text{погл.}}.$$
 (317)

Для получения $C_{\text{осл.}}$ непосредственно из общей формулы ослабления, следует воспользоваться более точной формулой для S(0), которая включает обратное действие излучения:

$$S(0) = ik^3\alpha + \frac{2}{3}k^6\alpha^2.$$
 (318)

Важно заметить, что при α , не зависящем от λ , рассеяние пропорционально $\lambda^{-4}V^2$, а поглощение – $\lambda^{-1}V$. Для очень малых частиц $(V \to 0)$ поглощение, если оно вообще имеет место, становится главным эффектом.

Единственный нетривиальный случай, когда поляризуемость частицы можно вычислить элементарным путем, это случай однородных эллипсоидов.

Для эллипсоидальных частиц с диэлектрической проницаемостью ε , полуосями a > b > c и объемом V, помещенных среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{среды}$, поляризуемость в поле, параллельном одной из его главных осей определяется выражением:

$$\alpha_{a} = abc \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды}}{3\varepsilon_{\rm среды} + 3L_{a}(\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды})},$$

$$\alpha_{b} = abc \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды}}{3\varepsilon_{\rm среды} + 3L_{b}(\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды})},$$

$$\alpha_{c} = abc \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды}}{3\varepsilon_{\rm среды} + 3L_{c}(\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды})},$$

$$L_{a} + L_{b} + L_{c} = 1,$$
(319)

где *L_a*, *L_b*, *L_c* геометрические факторы деполяризации.

В частном случае для сфероидальных частиц, когда $L_a = L_b = L_c = \frac{1}{3}$ поляризуемость определяется

$$\alpha = a^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\rm среды}}{\varepsilon + 2\varepsilon_{\rm среды}}.$$
(320)

Подставляя в $C_{\text{погл.}} = 4\pi k Im\{\alpha\}$ значения для поляризуемости эллипсоида в поле, параллельном одной из его главных осей и учитывая, что $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$, после преобразований получаем

$$C_{\text{погл.}} = \frac{V\omega_p^2 \gamma}{c} f\left(\varepsilon_{\text{среды}}, L\right) \frac{\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega_{sp}^2\right) + \gamma^2 \omega^2},\tag{321}$$

где $f(\varepsilon_{\text{среды}}, L) = \frac{\varepsilon_{\text{среды}}^{3/2}}{[\varepsilon_{\text{среды}} - L(\varepsilon_{\text{среды}} - 1)]^2}, \quad \omega_{sp} = \omega_p \sqrt{\frac{L}{\varepsilon_{\text{среды}} - L(\varepsilon_{\text{среды}} - 1)}}$ – резонансная частота для эллипсоидальной частицы, $L = L_{a,b,c}$.

4.5. Отсутствие отраженной волны при падении света на границу раздела двух сред под углом Брюстера

Оптические явления, возникающие на границе раздела – отражение и преломление света – можно рассматривать как эффекты, связанные с неоднородностью среды. Чтобы убедится в этом, вспомним сначала причины прямолинейного распространения света в среде. Как известно из френелевской теории дифракции, прямолинейное распространение света в вакууме связано с взаимным интерфереционным гашением вторичных сферических световых волн, идущих от разных точек пространства. Такое гашение имеет место для всех направлений, кроме прямого, что и обуславливает прямолинейность светового луча. Аналогичным образом в однородной среде сферические световые волны, испускаемые отдельными атомами, интерферируют так, что луч оказывается прямолинейным.



Рис. 23. К объяснению механизма однородного распространения света в среде.

Пусть А есть некоторый атом среды, расположенный в пределах светового пучка (рис. 23). Под действием падающей световой волны оптический электрон атома начинает совершать вынужденные колебания, в результате чего атом становится источником вторичной сферической световой волны. Рассмотрим излучение атома, идущего под углом θ к оси светового пучка. Для любого угла θ , кроме $\theta \neq 0$, найдется такой атом В, который в том же самом направлении спускает волну, находящуюся в противофазе к волне первого атома. В самом деле, если, например, падающее излучение имеет структуру плоской волны, то атом В находится в том же самом поперечном сечении пучка на расстоянии d от атома А, определяемом условием $dsin\theta = \frac{\lambda}{2}$, где λ – длина световой волны. Таким образом, атомы А и В взаимно

гасят излучение друг друга в направлении θ . Поскольку аналогичную пару атомов можно подобрать для любого угла $\theta \neq 0$, приходим к выводу, что свет распространяется прямолинейно.

В приведенном рассуждении существенна идентичность всех атомов, т.е. однородность среды. В неоднородной среде луч света не будет прямолинейным. На границе раздела сред нарушается прямолинейность распространения света и возникают отраженный и преломленный лучи.

Количественная теория отражения и преломления света строится на основе уравнений Максвелла и граничных условий для электромагнитного поля. На границе раздела диэлектриков должны быть непрерывны тангенциальные (параллельные поверхности раздела) компоненты напряженности электрического и магнитного поля. Граничные условия имею вид

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)},$$

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)},$$

$$B_x^{(1)} = B_x^{(2)},$$

$$B_y^{(1)} = B_y^{(2)}.$$

(322)



Рис. 24. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух сред.

Пусть на плоскую границу раздела двух сред падает плоская монохроматическая линейно поляризованная световая волна (рис. 24)

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{1}{2} \vec{E}_0^1 e^{(-i\omega t + \vec{k}_1 \vec{r})} + \kappa. c..$$
(323)

Угол между нормалью к границе раздела \vec{n} и волновым вектором \vec{k}_1 падающей волны обозначим θ_1 , комплексные диэлектрические проницаемости сред обозначим через ε_1 и ε_2 . Световые поля отраженной и преломленной волн записываются в виде

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \vec{E}_0^0 e^{(-i\omega t + \vec{k}_0 \vec{r})} + \text{K. C.,}$$

$$\vec{E}^{(2)} = \frac{1}{2} \vec{E}_0^2 e^{(-i\omega t + \vec{k}_2 \vec{r})} + \text{K. C..}$$
(324)

Учитывая граничное условие для тангенциальных компонент поля $E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, E_y^{(1)} = E_y^{(2)}$ в плоскости границы раздела, получим соотношение

$$E_{0x}^{1}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{1}\vec{r})} + E_{0x}^{0}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{0}\vec{r})} = E_{0x}^{2}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{2}\vec{r})},$$

$$E_{0y}^{1}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{1}\vec{r})} + E_{0y}^{0}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{0}\vec{r})} = E_{0y}^{2}e^{(-i\omega t+\vec{k}_{2}\vec{r})},$$
(325)

где амплитуды $E_{0x}^1, E_{0x}^0, E_{0x}^2, E_{0y}^1, E_{0y}^0, E_{0y}^2$ – постоянные величины. Это соотношение должно выполняться в любой момент времени *t* и для всех точек \vec{r} , лежащих на границе раздела. Следовательно,

$$-i\omega t + \vec{k}_{1}\vec{r} = -i\omega t + \vec{k}_{0}\vec{r} = -i\omega t + \vec{k}_{2}\vec{r},$$
(326)

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_0 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r},$$
 (327)
$$k_{1x}x + k_{1y}y = k_{0x}x + k_{0y}y = k_{2x}x + k_{2y}y.$$
(328)

Пусть x = 0, тогда

$$k_{1y} = k_{0y} = k_{2y}. (329)$$

При y = 0

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. (330)$$

Следовательно, волновые векторы отраженной и преломленной волн \vec{k}_0 и \vec{k}_2 лежат в плоскости падения.

Пусть ось x направлена вдоль границы раздела сред, а плоскость zx совпадала с плоскостью падения. Тогда $k_{1y} = k_{0y} = k_{2y} = 0$, $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}$.

$$k_{1x} = k_1 sin\theta_1,$$

$$k_{0x} = k_0 sin\theta_0,$$

$$k_{2x} = k_2 sin\theta_2,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 = k_0, \qquad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2,$$
(331)

где θ_0, θ_2 — соответственно углы отражения и преломления, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ -комплексные показатели преломления первой и второй сред. Следовательно, получаем соотношение

$$\theta_1 = \theta_0, \tag{332}$$

согласно которому угол падения равен углу отражения — закон отражения света.

Предположим теперь, что обе среды прозрачны, тогда показатели преломления n_1 и n_2 действительны. Получаем соотношение

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{333}$$

Формула связывает между собой угол падения и угол преломления света – закон Снеллиуса.

Вычислим амплитуды отраженной и преломленной волн, используя граничные условия, а также связь между полями \vec{E} и \vec{B} в световой волне, вытекающую Максвелла. ИЗ уравнений Падающая, отраженная И преломленная световые волны являются плоскими и монохроматическими. Среды, образующие границу раздела, линейны И изотропны. Распространение света в обеих средах описывается уравнениями Максвелла:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$rot\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Запишем \vec{E} , \vec{B} и \vec{D} в виде плоских монохроматических волн

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{(-i\omega t + \vec{k}_1 \vec{r})} + \kappa. c.,$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 e^{(-i\omega t + \vec{k}_1 \vec{r})} + \kappa. c.,$$
(334)

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \vec{D}_0 e^{(-i\omega t + \vec{k}_1 \vec{r})} + \kappa. c..$$

Учитывая, что $\vec{D}_0 = \varepsilon \vec{E}_0$, получим следующие соотношения между амплитудами электрического и магнитного полей в световой волне:

$$\begin{bmatrix} \vec{k}, \vec{E}_0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0,$$

$$\begin{bmatrix} \vec{k}, \vec{B}_0 \end{bmatrix} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_0.$$
(335)

Величина тангенциальной компоненты поля зависит от состояния поляризации падающей световой волны. Рассмотрим отдельно случаи, когда вектор \vec{E} перпендикулярен и параллелен плоскости падения. Волну с произвольным состоянием поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}.$$
(336)

1.) Пусть вектор \vec{E} падающей волны перпендикулярен плоскости падения,

т.е. $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$. Такую поляризацию называют s-поляризацией. В этом случае отраженная и преломленная волны будут также поляризованы перпендикулярно плоскости падения. Векторы \vec{B} всех трех волн будут лежать в плоскости падения. В этом случае тангенциальные компоненты векторов \vec{E} и \vec{B} принимают вид:

$$E_{\gamma} = E, \qquad B_{\chi}. \tag{337}$$

Граничные условия принимают вид:

$$E_y^1 + E_y^0 = E_y^2 = E^2 = E^1 + E^0, B_x^1 + B_x^0 = B_x^2$$

или

$$E_0^1 + E_0^0 = E_0^2,$$

$$B_{0x}^1 + B_{0x}^0 = B_{0x}^2.$$
(338)

Из $\left[\vec{k}, \vec{E}_0\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0$ следует

$$B_{0x} = -\frac{c}{\omega} k_z E_0, \tag{339}$$

тогда получаем

$$k_{1z}E_0^1 + k_{0z}E_0^0 = k_{2z}E_0^2.$$

Или с учетом, что

 $k_{0z} = -k_{1z},$

получаем

$$k_{1z}(E_0^1 - E_0^0) = k_{2z}E_0^2. aga{340}$$

Введем комплексные коэффициенты отражения (r_{\perp}) и преломления (t_{\perp}) света, определив их формулами

$$r_{\perp} = \frac{E_0^0}{E_0^{1}},$$

$$t_{\perp} = \frac{E_0^2}{E_0^{1}}.$$
(341)

Следовательно,

$$r_{\perp} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}},$$

$$t_{\perp} = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}}.$$
(342)

Полученные формулы устанавливают связь между амплитудами падающей, отраженной и преломленной световых волн.

2) Рассмотрим случай, когда вектор \vec{E} падающей волны параллелен плоскости падения, т.е. $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}$. Такую поляризацию называют р-поляризацией. В этом случае тангенциальные компоненты векторов \vec{E} и \vec{B} принимают вид:

$$B_y = B, \qquad E_x. \tag{343}$$

Граничные условия принимают вид:

$$B_y^1 + B_y^0 = B_y^2 = B^2 = B^1 + B^0, E_x^1 + E_x^0 = E_x^2$$

ИЛИ

$$B_0^1 + B_0^0 = B_0^2,$$

$$E_{0x}^1 + E_{0x}^0 = E_{0x}^2.$$
(344)

Из $\left[\vec{k}, \vec{B}_0\right] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_0$ следует

$$E_{0x} = \frac{c}{\omega} \frac{k_z}{\varepsilon} B_0, \qquad (345)$$

тогда получаем

$$\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1}B_0^1 + \frac{k_{0z}}{\varepsilon_1}B_0^0 = \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}B_0^2.$$

Или с учетом, что

 $k_{0z} = -k_{1z},$

получаем

$$\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} \left(B_0^1 - B_0^0 \right) = \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2} B_0^2.$$
(346)

Определим коэффициенты отражения (r_{\parallel}) и преломления (t_{\parallel}) света, определив их формулами

$$r_{\parallel} = \frac{B_0^0}{B_0^1},$$

$$t_{\parallel} = \frac{B_0^2}{B_0^1}.$$
(347)

Следовательно,

$$r_{\parallel} = \frac{k_{1z}/\epsilon_{1} - k_{2z}/\epsilon_{2}}{k_{1z}/\epsilon_{1} + k_{2z}/\epsilon_{2}},$$

$$t_{\parallel} = \frac{2k_{1z}/\epsilon_{1}}{k_{1z}/\epsilon_{1} + k_{2z}/\epsilon_{2}}.$$
(348)

Предположим теперь, что обе среды прозрачны, тогда диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и показатели преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ действительны. Нормальные компоненты волновых векторов падающей и преломленной волн выражаются формулами

$$k_{1z} = -k_1 \cos\theta_1,$$

$$k_{2z} = -k_2 \cos\theta_2,$$
(349)

где волновые числа

$$k_1 = \frac{\omega}{c} n_1,$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} n_2.$$
(350)

Таким образом, преобразовывая выражения для r_{\perp} и r_{\parallel} , получим

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2},$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}.$$
(351)

Принимая во внимание закон Снеллиуса, эти выражения преобразуются к виду

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)'},$$

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}.$$
(352)

Выражение r_{\perp} относится к случаю, когда падающая световая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения, а выражение r_{\parallel} - к случаю поляризации в плоскости падения.

Особенность выражений $r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$, $r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}$ состоит в том, что при определенных условиях коэффициент отражения r_{\parallel} обращается в ноль: $r_{\parallel} = 0$. Это имеет место, если сумма углов падения и преломления равна $\frac{\pi}{2}$:

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2. \tag{353}$$

Изложенная выше теория предсказывает полное исчезновение отраженной волны, если падающая световая волна поляризована в плоскости падения и выполняется соотношение $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. Эффект отсутствия отраженной волны называется эффектом Брюстера.

Угол падения, при котором имеет место эффект Брюстера определяется выражением

$$tg(\theta) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$
(354)

Брюстеровский угол называют еще углом полной поляризации. Если падающий под этим углом свет неполяризован, то отраженный пучок света линейно поляризован перпендикулярно плоскости падения.

Причину эффекта Брюстера можно объяснить следующим образом. Отраженный луч представляет собой нескомпенсированное излучение липолей второй среды, распространяющееся первой среде. При В условия Брюстера отраженный преломленный лучи выполнении И оказываются взаимно перпендикулярными. При этом диполи второй среды, Ē вектору преломленной колеблющиеся параллельно волны И. следовательно, перпендикулярно преломленному лучу, не испускают свет в направлении отраженного луча, так как это направление совпадает с направлением колебаний диполей. В результате отраженный луч отсутствует, и вся энергия света передается преломленному лучу.

Эффект Брюстера возможен лишь при поляризации падающего луча в плоскости падения. Если же падающий луч поляризован перпендикулярно плоскости падения, то отраженный луч наблюдается при любом угле падения.

4.6. Поверхностный плазмон на плоской поверхности металла

Рассмотрим поверхностные электромагнитные волны оптического диапазона, распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред и существующие одновременно в них обеих (рис. 25). Поля, переносимые этими волнами, локализованы вблизи поверхности и затухают по обе стороны от неё. плазмоны являются Поверхностные частично продольными Ŕ. ТМ-типа: электромагнитными волнами магнитный вектор перпендикулярный направлению распространения волны, лежит в плоскости поверхности; электрический вектор имеет две составляющие: Е_x вдоль волнового вектора k_xи E_z перпендикулярно поверхности. Поверхностные оптические волны описываются уравнениями Максвелла со стандартными граничными условиями. Распределение каждой из компонент электрического и магнитного полей на частоте ω в плоской поверхностной волны, бегущей вдоль оси *х*, имеет вид

$$E_{1} = E_{01}e^{-\kappa_{1}z}e^{i(k_{x}-\omega t)},$$

$$E_{2} = E_{02}e^{\kappa_{2}z}e^{i(k_{x}-\omega t)},$$

$$B_{1} = B_{01}e^{-\kappa_{1}z}e^{i(k_{x}-\omega t)},$$
(355)

$$B_2 = E_{02} e^{\kappa_2 z} e^{i(k_x - \omega t)},$$

где $E_{01}, E_{02}, B_{01}, B_{02}$ – амплитуды электрического и магнитного полей, $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$ – коэффициенты затухания поверхностных волн в средах 1 и 2, *t* – время. Знак (+) относится к среде 1 (*z*<0), (–) – к среде 2 (*z*>0).



Рис. 25. Поверхностные оптические волны: ориентация электрического и магнитного векторов в поверхностной оптической волне, бегущей вдоль поверхности в направлении оси *x*.

При заданной амплитуде магнитного вектора *B*, амплитуду остальных компонент равны:

$$E_{\chi} = \frac{i}{-\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} B,$$

$$E_{z1} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} B,$$

$$E_{z2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}} B,$$
(356)

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega)$ диэлектрические проницаемости сред 1 и 2 на частоте ω . Волновой вектор k_x удовлетворяет дисперсионному соотношению:

$$k_x = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}},\tag{357}$$

где $k_0 = \omega/_{\rm C}$.

Коэффициенты затухания κ_1 и κ_2 определяются как

$$\kappa_{1} = k_{x} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1}}{-\varepsilon_{2}}},$$

$$\kappa_{2} = k_{x} \sqrt{\frac{-\varepsilon_{2}}{\varepsilon_{1}}}.$$
(358)

Из условия вещественности и положительности величин k_x , $\kappa_1 u \kappa_2$ следует, что поверхностные плазмоны могут существовать только на границе раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями разных знаков. Если в среде $1 \varepsilon_1 > 0$, то диэлектрическая проницаемость среды 2, т. н. поверхностно-активной среды, должна удовлетворять условию:

$$\varepsilon_2 < 0, \tag{359}$$
$$|\varepsilon_2| > \varepsilon_1.$$

Обычно поверхностные плазмоны возбуждают на границе поверхностноактивной среды с воздухом ($\varepsilon_1 = 1$) или другим прозрачным диэлектриком. Для металлов и легированных полупроводников с высокой концентрацией свободных носителей данное условие выполняется в области аномальной дисперсии диэлектрической проницаемости, которая занимает весь ИК- и видимый (для металлов) диапазон частот и ограничена сверху частотой поверхностного плазмона ω_{ps} (для частот $\omega \ge \omega_{ps}$ металл становится прозрачным и поверхностные волны не возбуждаются). На рис. 26 показана типичная дисперсионная кривая $\omega(k_x)$ для плазмонных колебаний в системе «металл-диэлектрик», или поверхностных плазмон-поляритонов (параметры ω и k_x нормированы соответственно на плазменную частоту электронов ω_p и k_0).



Рис. 26. Дисперсионная кривая поверхностных плазмон-поляритонов на плоской границе раздела между простым металлом и вакуумом; ω_p – плазменная частота электронов; световая линия $\omega = ck_x$.

4.7. Возбуждение поверхностных плазмонов. Конфигурации Отто и Кречмана

Разработано несколько эффективных методов возбуждения поверхностных оптических волн светом: призменный, решёточный и с помощью краевых диафрагм.



Рис. 27. Возбуждение поверхностных оптических волн светом: призменный метод, геометрия Отто; *1* – диэлектрик (воздух); *2* – (металл); *3* – призма; *4* – падающее излучение; *5* – поверхностная оптическая волна; *6* – зеркально отражённое излучение.



Рис. 28. Возбуждение поверхностных оптических волн светом: призменный метод, геометрия Кречманна; 1 – диэлектрик (воздух); 2 – (металл); 3 – призма; 4 – падающее излучение; 5 – поверхностная оптическая волна; 6 – зеркально отражённое излучение.

В призменном методе, существующем в двух модификациях (геометрия Отто, рис. 27 и геометрия Кречманна, рис. 28), используется явление нарушенного полного внутреннего отражения при падении *p*-поляризованного излучения (поляризованного в плоскости падения) со стороны оптически более плотной среды под углом

$$\theta > \arcsin\left(\frac{\varepsilon_{\text{призмы}}}{\varepsilon_{\text{диэлектрик}}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
(360)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

а) основная литература

1. В.В. Климов. Наноплазмоника. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009.

2. Е.Ю. Перлин, Т.А. Вартанян, А.В. Федоров. Физика твердого тела. Оптика полупроводников, диэлектриков, металлов. Учебное пособие. ИТМО СПб. 2008.

3. Т.А. Вартанян, Е.Н. Калитеевская, Н.Б. Леонов, Т.К. Разумова, А.А. Старовойтов, Н.А. Торопов, В.В. Хромов. Методы измерения оптических свойств наноструктур. Лабораторный практикум. ИТМО СПб. 2011.

4. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.

б) дополнительная литература:

1. М. Борн, Э. Волф. Основы оптики. М.: Наука. 1973.

2. Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. 1961

3. Ю.И. Петров. Кластеры и малые частицы. М.: Наука, 1986.

4. С.А. Непийко. Физические свойства малых металлических частиц. Киев: Наукова думка. 1985.

5. Оптика наноструктур. Под ред. А.В. Федорова. Изд-во «Недра», СПб. 2005.

6. К. Борен, Д. Хафмен. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир. 1986.

7. H. Raether. Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1988.

8. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Радиоисвязь. 1988.

9. Дж. Джексон. Классическая электродинамика. М.: Мир. 1965.

10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.

11. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Бутиков Е. И. Оптика / СПб.: Лань, 2012. Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2764, свободный.

22. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Классическая электродинамика. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. СПб. Лань, 2003.

Режим доступа:

<u>http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=606</u>, свободный.

13. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Оптоэлектроника и нанофотоника. Игнатов А.Н., СПб.: Лань, 2011. Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=684, свободный.

14. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Сборник задач по основам электродинамики. Крамм М. Н., СПб, Лань, 2011.

Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1541, свободный.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». образования Российской Федерации Министерством И науки была образовательного утверждена развития государственного Программа профессионального учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009-2018 годы.

КАФЕДРА ОПТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Кафедра основана в 2002 году в составе факультета «Фотоники и оптоинформатики», готовящего специалистов для одной самых ИЗ инновационных областей современной науки и техники, В которой разрабатываются оптические технологии обработки и передачи информации, строящиеся на основе нанотехнологий и новых оптических материалов, а также информационных технологий. Кафедрой руководит доктор физ.-мат. наук, профессор А.В. Федоров. Кафедра ведет подготовку бакалавров по направлению «200700 Фотоника и оптоинформатика», магистров И аспирантов по специальности «Оптика наноструктур».

Основные цели кафедры – подготовка высококвалифицированных исследователей, способных конкурировать на мировом рынке научных сотрудников, и проведение научных и технологических работ мирового уровня по исследованию и разработке наноматериалов, наноструктур, микро и наносистем с участием студентов и аспирантов.

В настоящее время на кафедре преподают: академик РАН Е.Б. Александров, профессора: А.В. Баранов, Т.А. Вартанян, Н.В. Каманина, Е.А. Коншина, В.Г. Маслов, Е.Ю. Перлин, А.В. Федоров, доценты: Л.П. Амосова, Г.Н. Виноградова, В.Л. Комолов, А.О. Орлова, Е.В. Ващенко, П.С. Парфенов, А.А. Старовойтов.

Авторы данного учебного пособия – д.ф.-м.н. Вартанян Тигран Арменакович и к.ф.-м.н. Ващенко Елена Валерьевна, специалисты в области фотофизики поверхности.

Тигран Арменакович Вартанян Елена Валерьевна Ващенко ВВЕДЕНИЕ В НАНОПЛАЗМОНИКУ Учебно-методическое пособие

В авторской редакции	
Дизайн	Е.В. Ващенко
Верстка	Е.В. Ващенко
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО	
Зав. РИО	Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99	
Подписано к печати	
Заказ №	
Тираж 100 экз.	
Отпечатано на ризографе	

Редакционно-издательский отдел

Санкт-Петербургского государственного национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

